

ÜSLÜ İFADELER KONU ANLATIMI

a bir gerçel sayı ve n bir sayma sayısı olmak üzere n tane a sayısının çarpımına a'nın n.kuvveti denir.

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a.a$$

$$a^3 = a.a.a$$

⋮

$$a^n = \underbrace{a.a.a \dots a}_{n \text{ tane}} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

a^n ifadesinde a'ya taban, n'ye üs (kuvvet) denir.

Örnek:

Uyarı: Bir sayının üssünü almak ile çarpmak aynı şey değildir.

Örnek: 2^3 sayısı 6'ya eşit değildir.

2^3 sayısı 3 tane 2'nin arka arkaya çarpılması demek.

Bu sebeple $2.2.2 = 8$ dir.

Not: a sayısı 0 olmayan bir reel sayı olmak üzere

$$a^0 = 1 \text{ dir.}$$

0^0 belirsizdir.

Örnek:

$$3^0 = 1, (-2)^0 = 1, \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1 \text{ dir.}$$

Not:

$$a^1 = a \text{ dir.}$$

Örnek:

$$5^1 = 5, 3^1 = 3, 0^1 = 0 \text{ dir}$$

Not:

$$1^n = 1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$1^2 = 1, 1^{15} = 1, 1^{-5} = 1 \text{ dir.}$$

Not:

$$0^n = 0 \text{ dir}(n > 0).$$

Örnek:

$$0^2 = 0, 0^{15} = 0 \text{ dir.}$$

Not:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3.3} = \frac{1}{9} \text{ dur.}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \text{ tür.}$$

Not: a bir negatif gerçel sayı ve n tam sayı olmak üzere,

n tek ise $a^n < 0$

n çift ise $a^n > 0$ dir.

Örnek:

$$(-2)^3 = -8$$

$$(-2)^4 = 16 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^0 + (-1)^{101} + 1^{99} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = ?$$

Çözüm:

$$\underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^0}_1 + \underbrace{(-1)^{101}}_{\substack{\text{üs tek olduğundan} \\ -1'e eşittir.}} + \underbrace{1^{99}}_1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}_{\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8}$$

$$= 1 - 1 + 1 - 8 = -7 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$-3^2 + (-2)^2 = ?$$

Çözüm:

$-3^2 \Rightarrow$ 2 sayısı 3'ün kuvvetidir. (-3) 'ün değil.

Bu sebeple $-3^2 = -3.3 = -9$ dur.

$$(-2)^2 = (-2).(-2) = 4 \text{ tür.}$$

$$\Rightarrow -9 + 4 = -5 \text{ buluruz.}$$

Üslü Sayılarda Toplama Çıkarma

Tabanı ve üssü aynı olan ifadelerin katsayıları toplanır veya çıkarılır.

$$ax^n + bx^n - cx^n = (a+b-c)x^n \text{ dir.}$$

Örnek:

$$3.2^x - 5.2^x + 6.2^x = (3-5+6).2^x = 4.2^x \text{ tir.}$$

Örnek:

$$7.5^{12} + 5^{12} - \frac{6}{5^{-12}} = ?$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} &= 7.5^{12} + 1.5^{12} - \frac{6}{\frac{1}{5^{12}}} \\ &= 7.5^{12} + 1.5^{12} - 6.5^{12} \\ &= (7+1-6).5^{12} \\ &= 2.5^{12} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Üslü Sayılarda Çarpma

Tabanlar aynı ise, üsler toplanır.

$$\text{Örnek: } 2^3.2^4 = 2^{3+4} = 2^7 \text{ dir.}$$

Üsler aynı ise, tabanlar çarpılır.

$$\text{Örnek: } 5^4.2^4 = (5.2)^4 = 10^4 \text{ tür.}$$

Örnek:

$$(-3)^{-6}.2^{-6}.(-6)^8 = ?$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \underbrace{(-3)^{-6}.2^{-6}}_{(-6)^{-6}}.(-6)^8 &= (-6)^{-6}.(-6)^8 = (-6)^{-6+8} = (-6)^2 \\ &= (-6)(-6) = 36 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Not: a^n ifadesinin içindeki a çarpanlarını istediğimiz sayıda dışarı çıkarıp, üssü azaltarak tekrar yazabiliriz.

$$\begin{aligned} a^n &= a.a^{n-1} \\ &= a^2.a^{n-2} \\ &= a^3.a^{n-3} \text{ gibi.} \end{aligned}$$

Örnek:

$$\frac{5^2.3^3 + 5^3.3^2}{15} = ?$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{5^2.3^3 + 5^3.3^2}{15} &= \frac{3.5^2.3^2 + 5.5^2.3^2}{15} = \frac{3.15^2 + 5.15^2}{15} \\ &= \frac{8.15^2}{15} = \frac{8.15.\cancel{15}}{\cancel{15}} = 120 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Üslü Sayılarda Bölme

Tabanlar aynı ise, üsler çıkarılır.

$$\text{Örnek: } \frac{2^8}{2^3} = 2^8 - 2^3 = 2^5 \text{ tir.}$$

Üsler aynı ise, tabanlar bölünür.

$$\text{Örnek: } \frac{15^7}{3^7} = 5^7 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\frac{3^5 - 3^6 + 3^7}{3^4 - 3^5 + 3^6} = \frac{3^5(1-3+3^2)}{3^4(1-3+3^2)} = \frac{3^5}{3^4} = 3^{5-4} = 3^1 = 3 \text{ tür.}$$

Not: Üssün üssü alınırken üsler çarpılır.

$$(a^n)^m = a^{n.m} \text{ dir.}$$

$$\text{Örnek: } (2^2)^3 = 2^6 = 64 \text{ tür.}$$

Not: Negatif sayının kuvvetleri alınırken çift kuvvet varsa, bu kuvvet sadece işaretsiz sayının mı yoksa negatif sayının mı çift kuvveti? Ona dikkat etmek lazım. Çünkü duruma göre, sonuç pozitif veya negatif olabilmektedir.

Örnek: $(-2^4)^3 = -2^{12}$ iken $(-2^3)^4 = 2^{12}$ dir. Çünkü, ilkinde çift kuvvet sadece 2'nin kuvvetidir. İkincisinde ise, çift kuvvet tüm negatif sayının kuvvetidir.

Örnek:

$2^x = a$, $3^x = b$ ve $5^x = c$ ise, 600^x sayısını a , b ve c cinsinden ifade edelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
600^x &= (600)^x = (6 \cdot 100)^x \\
&= (2 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 4)^x \\
&= (2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 2^2)^x \\
&= (2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)^x \\
&= 2^{3x} \cdot 3^x \cdot 5^{2x} \\
&= (2^x)^3 \cdot 3^x \cdot (5^x)^2 \\
&= a^3 \cdot b \cdot c^2 \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Örnek:

$$\frac{25^4 \cdot 125^{-3}}{5^8 \cdot 625^{-1}} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{25^4 \cdot 125^{-3}}{5^8 \cdot 625^{-1}} = \frac{(5^2)^4 \cdot (5^3)^{-3}}{5^8 \cdot (5^4)^{-1}} = \frac{5^8 \cdot 5^{-9}}{5^8 \cdot 5^{-4}} = \frac{5^{-1}}{5^4} = 5^{-1-4} = 5^{-5} \text{ tir.}$$

Not: Negatif üs, bir kesri takla attırır.

$$\text{Örnek: } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \text{ tür.}$$

Örnek:

$$2^x \cdot 3^{-x} = a \text{ ise, } \left(\frac{4}{9}\right)^{4x+2} \text{ nin } a \text{ türünden eşitini bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\frac{2^x}{3^x} = a \text{ ise } \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = a \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{4x+2} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{8x+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8x} = \frac{2^4}{3^4} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^8 \\
&= \frac{16}{81} \cdot a^8 \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Örnek:

$$\frac{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3}{2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{2^{3+3+3+3}}{4 \cdot 2^5} = \frac{2^{12}}{2^2 \cdot 2^5} = \frac{2^{12}}{2^7} = 2^5 = 32 \text{ dir.}$$

Uyarı: $(a^x)^y$ ile $a^{(x^y)}$ aynı şey değildir.

$$\text{Örnek: } (2^3)^2 = 8^2 = 64 \text{ tür.}$$

$$2^{(3^2)} = 2^9 = 512 \text{ dir.}$$

Not: Bir sayının kaç basamaklı olduğunu bulmak için 10'un kuvvetinden yararlanabiliriz. 10'un kuvveti kaçsa, o kadar 0 vardır.

$$\text{Örnek: } 5 \cdot 10^3 = 5000 \Rightarrow 4 \text{ basamaklı}$$

$$12 \cdot 10^8 = 1200 \dots 0 \Rightarrow 10 \text{ basamaklı}$$

3 sıfır 8 sıfır

Örnek: $8^{17} \cdot 5^{50}$ çarpımının sonucu kaç basamaklıdır?**Çözüm:**

$$(2^3)^{17} \cdot 5^{50} = 2^{51} \cdot 5^{50} = 2 \cdot 2^{50} \cdot 5^{50} = 2 \cdot 10^{50} = 2 \underbrace{00 \dots 0}_{50 \text{ sıfır}}$$

 \Rightarrow 51 basamaklıdır.**Not:** Ondalık kesirlerde virgülden ne kadar sola kaydırırsak, çarpım halindeki 10'un kuvveti o kadar artar.

$$\text{Örnek: } 52,8 \cdot 10^3 = 5,28 \cdot 10^4 = 0,528 \cdot 10^5 \text{ tir.}$$

Tam tersinde ise, 10'un kuvveti azalır.

$$\text{Örnek: } 8,23 \cdot 10^2 = 82,3 \cdot 10^1 = 823 \text{ tür.}$$

Örnek:

$$\frac{0,11 \cdot 10^{23} - 0,002 \cdot 10^{24}}{0,3 \cdot 10^{22}} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{11 \cdot 10^{21} - 2 \cdot 10^{21}}{3 \cdot 10^{21}} = \frac{9 \cdot 10^{21}}{3 \cdot 10^{21}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ tür.}$$

Üslü Denklemler

1) -1,0 ve 1 olmayan a gerçel sayısı için $a^x = a^y$ ise $x=y$ dir.

Örnek: $5^3 = 5^k$ ise $k=3$ tür.

Örnek:

$3^{x-2} = 81$ ise 2^{x+2} kaçtır?

Çözüm:

$$3^{x-2} = 3^4 \Rightarrow x-2=4 \Rightarrow x=6 \text{ dir.}$$

$$2^{x+2} \Rightarrow 2^{6+2} = 2^8 = 256 \text{ dir.}$$

Örnek:

$2^x \cdot 6^{4-x} = 48$ ise x kaçtır?

Çözüm:

$$2^x \cdot (2 \cdot 3)^{4-x} = 48$$

$$2^x \cdot 2^{4-x} \cdot 3^{4-x} = 48$$

$$2^{x+4-x} \cdot 3^{4-x} = 48$$

$$2^4 \cdot 3^{4-x} = 48$$

$$\cancel{16} \cdot 3^{4-x} = \cancel{48}^3$$

$$3^{4-x} = 3^1 \Rightarrow 4-x=1 \Rightarrow x=3 \text{ tür.}$$

2) -1,0 ve 1 olmayan a gerçel sayısı ve 0 dan farklı x tamsayısı için,

$a^x = b^x$ denkleminde

x tek ise $a=b$ dir.

x çift ise $|a|=|b|$ dir.

Örnek:

$$(a+2)^3 = (4-a)^3 \text{ ise a kaçtır?}$$

Çözüm:

$$a+2=4-a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$(2a-2)^4 = (10-a)^4 \text{ ise a'nın değerleri toplamı kaçtır?}$$

Çözüm:

$$2a-2=10-a \Rightarrow 3a=12 \Rightarrow a=4 \text{ tür.}$$

veya

$$2a-2=-(10-a) \Rightarrow 2a-2=-10+a$$

$$a=-8 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow a'nın değerleri toplamı = 4 + (-8) = -4 \text{ tür.}$$

Örnek:

$$(2a-2)^4 = (10-a)^4 \text{ ise a'nın değerleri toplamı kaçtır?}$$

Çözüm:

$$2a-2=10-a \Rightarrow 3a=12 \Rightarrow a=4 \text{ tür.}$$

veya

$$2a-2=-(10-a) \Rightarrow 2a-2=-10+a$$

$$a=-8 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow a'nın değerleri toplamı = 4 + (-8) = -4 \text{ tür.}$$

Örnek:

$$(2+a^{-1}+2^{-2})^{-3} = \frac{1}{64} \text{ ise a kaçtır?}$$

Çözüm:

$$(2+a^{-1}+2^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\underbrace{(2+a^{-1}+2^{-2})}_4^{-3} = 4^{-3}$$

$$2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{4} = 4$$

$$\frac{1}{a} + \frac{9}{4} = 4$$

$$\frac{1}{a} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{4}{7} \text{ dir.}$$

3) Bir üslü sayı 3 durumda 1'e eşit olabilir.

- $a \neq 0$ ise $a^0 = 1$ dir.
- $1^n = 1$ dir.
- n çift ise $(-1)^n = 1$ dir.

Örnek:

$(x-4)^{x-1} = 1$ ise x 'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Çözüm:

• Üs, sıfıra eşit olursa

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ dir. } x=1 \text{ olunca taban} = x-4 = -3$$

$$\Rightarrow (-3)^0 = 1 \text{ dir, olur. } \Rightarrow x=1 \text{ olabilir.}$$

• Taban, 1'e eşit olursa

$$x-4=1 \Rightarrow x=5 \text{ tir. } \text{Üs} = x-1 = 4 \text{ olur.}$$

$$1^4 = 1 \text{ dir. } \Rightarrow x=5 \text{ olabilir.}$$

• Taban, -1'e eşit olursa

$$x-4=-1 \Rightarrow x=3 \text{ tür. } \text{Üs} = \underbrace{x-1}_3 = 2 \text{ olur.}$$

$$(-1)^2 = 1 \text{ dir. } \Rightarrow x=3 \text{ olabilir.}$$

$$\Rightarrow x \text{ değerleri toplamı } 1+5+3=9 \text{ dur.}$$

Örnek:

x ve y birer tam sayıdır.

$$7^{x-y-2} = 12^{2x+y-10} \text{ ise } x.y \text{ çarpımı kaçtır?}$$

Çözüm:

Böyle bir eşitlik, ancak üslerin 0 olmasıyla sağlanır.

$$x-y-2=0$$

$$+ 2x+y-10=0 \text{ taraf tarafa toplayalım.}$$

$$3x-12=0 \Rightarrow x=4$$

$$\frac{x}{4} - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ dir.}$$

$$x.y = 4.2 = 8 \text{ buluruz.}$$

Örnek:

$$27^x \cdot 64^{-x} = 11^3 \text{ ise } 11^{\frac{1}{x}} \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$27^x \cdot 64^{-x} = 11^3$$

$$\left(\frac{27}{64}\right)^x = 11^3$$

$$\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^x = 11^3$$

$$\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)^3 = 11^3$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = 11 \text{ iki tarafın da } \frac{1}{x} \text{ kuvvetini alalım.}$$

$$\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = 11^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 11^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

Not:

a ve b , 1 den farklı olmak üzere,

$$\left. \begin{array}{l} a^x = b^y \\ a^n = b^m \end{array} \right\} \text{ ise üsleri oranlayabiliriz. } \Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{y}{m} \text{ dir.}$$

Örnek:

$$2^x = 25$$

$$4^y = 125 \text{ ise, } 64^{\frac{x}{y}} \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$2^x = 5^2$$

$$2^{2y} = 5^3 \Rightarrow \frac{x}{2y} = \frac{2}{3}$$

$$3x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \text{ tür. Buna göre,}$$

$$64^{\frac{x}{y}} = \left(2^6\right)^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{2 \cdot 4}{3}} = 2^8 = 256 \text{ dir.}$$