

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Şeklinde katsayıların gerçekteki sayı, üslerin ise doğal sayı olduğu ifadelerle bir değişkenli **polinom** denir.

Örnek:

$P(x) = 2x^2 + x$ ifadesi bir polinomdur.

$P(x) = x^3 + 2x^{-1}$ ifadesi bir polinom değildir.

Çünkü x 'in üssü doğal sayı olmalıdır.

$P(x) = x^4 + \sqrt{3x} + 5$ ifadesi bir polinom değildir.

Çünkü $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ demektir. Üs, doğal sayı olmalıydı.

$P(x) = x + \frac{5}{x} + 5$ ifadesi bir polinom değildir.

Çünkü $\frac{5}{x} = 5 \cdot x^{-1}$ demektir. Üs, doğal sayı olmalıydı.

Örnek:

$P(x) = x^5 - x^{\frac{8}{m+3}} + x^{m-2} + 5$ ifadesi bir polinom ise $m = ?$

Çözüm:

x 'in üssü doğal sayı olmalıdır.

x^{m-2} den dolayı $m \geq 2$ olmalıdır.

$\frac{8}{m+3}$ ifadesi de bir doğal sayı olmalıdır.

Buna uygun 2'den büyük olan tek m değeri 5 tir.

O halde $m = 5$ tir.

Polinomun Özellikleri

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Polinomunun katsayıları

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ dir.

Polinomun terimleri

$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$ dir.

Kuvveti en büyük olan x 'in derecesi, polinomun **derecesi**dir ve $\deg[P(x)]$ ile gösterilir. Bu x 'in katsayısı da polinomun **başkatsayısı**dır.

a_0 ise polinomun **sabit terimi**dir.

Örnek:

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x + 1$$

Polinomunun katsayıları: 3, -2, 1, 5, 1 dir.

Polinomunun derecesi: 4 tür.

Polinomun Baş Katsayısı: 3 tür.

Sabit Terimi: 1 dir.

Tek dereceli terimlerin katsayıları: -2, 5 tir.

Çift dereceli terimlerin katsayıları: 3, 1, 1 dir.

Not: $x=0$ yazılarak polinomun sabit terimi,

$x=1$ yazılarak, polinomun katsayılar toplamı bulunur. $P(x)$ in sabit terimi $P(0)$, katsayılar toplamı da $P(1)$ dir.

Örnek:

$$P(x) = 5x^2 - 3x + 1$$

Polinomunun sabit terimi

$$P(0) = 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ dir.}$$

Kat sayılar toplamı

$$P(1) = 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 5 - 3 + 1 = 3 \text{ tür.}$$

Örnek:

$P(x) = x^5 + 2x + 3$ olduğuna göre, $P(x+3)$ ün katsayılar toplamı kaçtır?

Çözüm:

$x = 1$ yazılır.

$P(x+3) = P(4)$ ü bulmalıyız.

$$P(4) = 4^5 + 2 \cdot 4 + 3 = 1024 + 8 + 3 = 1035 \text{ tir.}$$

Not: Polinomun çift dereceli terimlerin katsayılar toplamı

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2} \text{ dir.}$$

Polinomun tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı ise

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$P(x) = 3x^4 + 5x^2 - 3x + 1$ polinomunun Çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı:

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{6 + 12}{2} = 9 \text{ dur.}$$

Tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı:

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{6 - 12}{2} = -3 \text{ tür.}$$

Not: Polinomdaki değişkenlerin katsayıları 0 ise bu bir **sabit polinom**dur. Örnek: $P(x) = 5$

Sabit polinomun derecesi 0 dir.

Sabit polinomun sabit değeri 0 ise bu bir **sıfır polinom**dur. $P(x) = 0$ dir.

Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

$0.x^3$, $0.x^2$, $0.x^{75}$ gibi sayısız örnekler yazılabildiğinden sıfır polinomunun derecesi belirlenemez.

Örnek:

$P(x) = (m-2)x^5 + (n+2)x^3 + 5$ ifadesi sabit polinom ise, m.n çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$$P(x) = \underbrace{(m-2)}_0 x^5 + \underbrace{(n+2)}_0 x^3 + 5$$

$m = 2$ ve $n = -2$ olmalıdır.

Çarpımları $2.(-2) = -4$ tür.

Not: $P(x) = Q(x)$ ise bu iki polinomun derecesi eşittir ve aynı dereceli terimlerin katsayıları birbirine eşittir.

Örnek:

$$P(x) = 3x^2 + (a+1)x - b$$

$$Q(x) = 3x^c + 5x + 2$$

$P(x) = Q(x)$ ise $a + b + c$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$P(x) = 3x^2 + (a+1)x - b$$

$$Q(x) = 3x^c + 5x + 2$$

$$\Rightarrow a + b + c = 4 \text{ tür.}$$

Polinomlarda Toplama Çıkarma

Polinomlarda toplama çıkarma yapılırken, aynı dereceli terimlerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

Örnek:

$$P(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

$$Q(x) = 3x^2 + 5x \text{ olduğuna göre,}$$

$$P(x) + Q(x) = (4+3)x^2 + (-3+5)x + 1 = 7x^2 + 2x + 1 \text{ dir.}$$

$$P(x) - Q(x) = (4-3)x^2 + (-3-5)x + 1 = x^2 - 8x + 1 \text{ dir.}$$

Not: Dereceleri farklı olan iki polinomun toplamının veya farkının derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesine eşittir.

Örnek:

$P(x)$ bir polinom olmak üzere, $P(x+3) + P(x-2) = 2x - 5$ ise $P(5)$ kaçtır?

Çözüm:

Toplamları 1.dereceden bir polinom olduğuna göre,

$P(x) = ax + b$ şeklinde bir polinomdur.

$$P(x+3) + P(x-2) = 2x - 5$$

$$a(x+3) + b + a(x-2) + b = 2x - 5$$

$$ax + 3a + b + ax - 2a + b = 2x - 5$$

$$2ax + a + 2b = 2x - 5$$

$$a = 1 \text{ dir.}$$

$$a + 2b = -5 \Rightarrow 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \text{ tür.}$$

$$P(x) = x - 3 \text{ tür.}$$

$$P(5) = 5 - 3 = 2 \text{ dir.}$$

Polinomlarda Çarpma İşlemi

$P(x)$ ile $Q(x)$ çarpılırken, $P(x)$ 'in bütün terimleri $Q(x)$ in bütün terimleri ile çarpılır. Ortaya çıkan terimlerin toplamı, çarpımın sonucunu verir.

Örnek:

$$P(x) = 2x^2 + x$$

$$Q(x) = x^3 - 5 \text{ ise } P(x).Q(x) \text{ çarpımını bulunuz.}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= (2x^2 + x)(x^3 - 5) \\ &= 2x^5 + x^4 - 10x^2 - 5x \text{ tir.} \end{aligned}$$

Polinomların Dereceleri ile İlgili İşlemler

$\text{der}[P(x)] = a$, $\text{der}[Q(x)] = b$ ve $a > b$ olsun.

$$\text{der}[P(x).Q(x)] = a + b \text{ dir.}$$

$$\text{der}[P(x^k)] = k.a \text{ dır.}$$

$$\text{der}[P(x) \mp Q(x)] = a$$

$$\text{der}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = a - b \text{ dir.}$$

$$\text{der}[P^k(x)] = k.a \text{ dır.}$$

Örnek:

$$P(x) = x^3 + 3x^2$$

$$Q(x) = -x^5 + x^2 + 3 \text{ ise,}$$

$$\text{der}[P(x).Q(x)] = ?$$

$$\text{der}[P(x^2).Q(x)] = ?$$

$$\text{der}[P(x) + Q(2x)] = ?$$

$$\text{der}\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right] = ?$$

Çözüm:

$$\text{der}[P(x)] = 3 \text{ tür.}$$

$$\text{der}[Q(x)] = 5 \text{ tir.}$$

$$\text{der}[P(x).Q(x)] = 3 + 5 = 8 \text{ dir.}$$

$$\text{der}[P(x^2).Q(x)] = 2.3 + 5 = 6 + 5 = 11 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \text{der}[P(x) + Q(2x)] &= 3 + \underbrace{5}_{\substack{\text{derecesi } 1 \\ 1.5=5 \text{ tir.}}} = 5 \text{ tir.} \end{aligned}$$

$$\text{der}\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right] = 5 - 3 = 2 \text{ dir.}$$

Polinomlarda Bölme

$$\left. \begin{array}{l} P(x) \overline{) Q(x)} \\ \underline{ B(x)} \\ K(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{der}[P(x)] \geq \text{der}[Q(x)] \text{ tir.} \\ \text{der}[K(x)] < \text{der}[Q(x)] \text{ tir.} \\ Q(x) \neq 0 \text{ dır.} \end{array}$$

$$P(x) = Q(x).B(x) + K(x) \text{ tir.}$$

$$K(x) = 0 \text{ ise } P(x), Q(x) \text{ 'e tam bölünür.}$$

Örnek:

$P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 5$ polinomunu $Q(x) = x - 1$ polinomuna bölelim.

Çözüm:

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - x^2 + 2x - 5 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{3x^3 - 3x^2} \qquad \qquad 3x^2 + 2x + 4 \quad \text{3x}^3 \text{ içinde kaç tane x var=3x}^2 \\
 2x^2 + 2x - 5 \quad \text{2x}^2 \text{ nin içinde kaç tane x var=2x} \\
 \underline{2x^2 - 2x} \\
 4x - 5 \quad \text{4x in içinde kaç tane x var=4} \\
 \underline{4x - 4} \\
 -1 \quad \text{dir. Buna göre,}
 \end{array}$$

$$\underbrace{3x^3 - x^2 + 2x - 5}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{(x - 1)}_{\text{Bölen}} \underbrace{(3x^2 + 2x + 4)}_{\text{Bölüm}} + \underbrace{(-1)}_{\text{Kalan}} \text{ dir.}$$

Örnek:

$P(x) = x^2 + mx + n$ polinomu $(x + 1)$ ile bölündüğünde bölüm $(x + 5)$ ve kalan 3 ise m.n çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x + 1)(x + 5) + 3 \text{ tür.} \\
 &= x^2 + 6x + 5 + 3 \\
 &= x^2 + 6x + 8 \\
 &\quad \quad \quad m \quad \quad n \\
 \Rightarrow m.n &= 6.8 = 48 \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

Bölme İşlemi Yapmadan Kalan Bulma

$P(x)$ polinomunun $(ax + b)$ ile bölümünden kalan

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) \text{ dır.}$$

$$P(x) = \underbrace{(ax + b)}_{\substack{x = -\frac{b}{a} \text{ için} \\ \text{burası 0 olur.}}} . B(x) + \text{Kalan}$$

Örnek:

$P(x) = x^2 + 5x + 3$ polinomunun $(x - 2)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

İlk önce Bölen'i 0'a eşitliyoruz.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ dir.}$$

$P(x)$ polinomunda x yerine 2 yazarak kalanı buluyoruz.

$$P(2) = 2^2 + 5.2 + 3 = 4 + 10 + 3 = 17 \text{ dir.}$$

Örnek:

$P(x) = x^2 - 3x + 1$ polinomunun $(3x - 9)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm:

İlk önce Bölen'i 0'a eşitliyoruz.

$$3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ tür.}$$

$P(x)$ polinomunda x yerine 3 yazarak kalanı buluyoruz.

$$P(3) = 3^2 - 3.3 + 1 = 1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$P(x) = x^3 - 2x^2 + ax - 5$ polinomunu $(2x + 4)$ polinomuna tam bölünebiliyorsa a kaçtır?

Çözüm:

İlk önce Bölen'i 0'a eşitliyoruz.

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ dir.}$$

Kalan 0 ise, $P(-2) = 0$ olmalıdır.

$$(-2)^3 - 2.(-2)^2 + a.(-2) - 5 = 0$$

$$-8 - 8 - 2a - 5 = 0$$

$$-2a = 21$$

$$a = -\frac{21}{2} \text{ dir.}$$

Örnek:

$P(x+2) = x^3 + 2$ dir. $P(x)$ polinomunun $(x-3)$ ile bölümünden kalan kaçır?

Çözüm:

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \text{ tür.}$$

$P(x)$ te $x=3$ yazacağız. Yani $P(3)$ 'ü bulmalıyız.

$$P(x+2) = x^3 + 2$$

Burayı 3
yapan x
değeri
1 dir.

$$P(1+2) = 1^3 + 2 = 3 \text{ tür.}$$

Örnek:

$P(2x+1) = x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ tür. $P(3x-5)$ polinomunun $(x-2)$ ile bölümünden kalan kaçır?

Çözüm:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ dir.}$$

$P(3x-5)$ te $x=2$ yazacağız.

Yani $P(3 \cdot 2 - 5) = P(1)$ 'i bulmalıyız.

$$P(2x+1) = x^3 + 5x^2 - 2x + 3$$

Burayı 1
yapan x
değeri
0 dir.

$$P(0+1) = 0^3 + 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \text{ tür.}$$

Not: $P(a)=0$ yapan a değerine **polinomun sıfırı** denir. Buna dayanarak, $P(x)$ in içinde $(x-a)$ çarpanı vardır, diyebiliriz.

Örnek:

$P(x) = x^5 + ax + 2$ polinomunun sıfırlarından biri 2 ise a kaçır?

Çözüm:

$$P(2) = 0 \text{ dir.}$$

$$2^5 + 2a + 2 = 0$$

$$32 + 2a + 2 = 0$$

$$2a = -34$$

$$a = -17 \text{ dir.}$$

Örnek:

$P(x)$ polinomunun (x^2-1) ile bölümünden kalan $(2x+5)$ tir. $P(x)$ 'in $(x+1)$ ile bölümünden kalan kaçır?

Çözüm:

$P(x) = (x^2-1) \cdot B(x) + 2x+5$ şeklinde bir polinomdur.

$x+1$ ile bölümünden kalanı bulmak için $x=-1$ yazarız.

$$\begin{aligned} P(-1) &= ((-1)^2 - 1) \cdot B(x) + 2 \cdot (-1) + 5 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{0 \text{ dir.}} \\ &= -2 + 5 \\ &= 3 \text{ tür.} \end{aligned}$$

Örnek:

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları arasında

$$\frac{P(3x-8)}{Q(2x-4)+2} = x^2 + x - 2$$

bağıntısı bulunmaktadır.

$P(x)$ 'in $(x-1)$ ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, $Q(x+2)$ polinomunun sabit terimi kaçır?

Çözüm:

$P(x)$ 'in $(x-1)$ ile bölümünden kalan 3 ise $P(1) = 3$ tür.

$Q(x+2)$ nin sabit terimi için $x=0$ yazarız. $\Rightarrow Q(2) = ?$

Verilen bağıntıda $x=3$ yazarsak, $P(1)$ 'i kullanabiliriz.

$$\frac{P(3x-8)}{Q(2x-4)+2} = x^2 + x - 2$$

$$\frac{P(1)}{Q(2)+2} = 9 + 3 - 2$$

$$\frac{3}{Q(2)+2} = 10$$

$$\frac{Q(2)+2}{3} = \frac{1}{10} \Rightarrow Q(2)+2 = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow Q(2) = -\frac{17}{10} \text{ buluruz.}$$