PERMÜTASYON

OLMAZSA OLMAZ ANAHTAR BİLGİLER

Permütasyon (Sıralama)

n ve r birer doğal sayı ve $n \geq r$ olmak üzere,
n elemanlı bir kümenin r elemanlı her bir sıralanışına bu kümenin r li permütasyonu denir.
n elemanlı bir kümenin tüm r li permütasyonlarının sayısı,

$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ dir. Ya da kısaca,

$P(n, r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}_{r \text{ tane}}$ yazılabilir.

- ✓ $P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$
- ✓ $P(5, 2) = 5 \cdot 4 = 20$
- ✓ $P(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
- ✓ $P(n+3, 2) = (n+3) \cdot (n+2)$
- ✓ n elemanlı bir kümenin tüm n li sıralanışlarının sayısı, $P(n, n) = n!$ dir.
- ✓ $P(5, 5) = 5! = 120$

Örnek

$P(n, 3) = 5 \cdot P(n-1, 2)$ olduğuna göre, n kaçtır?

Çözüm

$n \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \cancel{(n-2)} = 5 \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \cancel{(n-2)}$

$n = 5$

Örnek

Anne, baba ve 4 çocuklu bir aile yatay bir sıra boyunca anne ve baba yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabilirler?

Çözüm

$\underbrace{AB}_{1}\, Ç_1 Ç_2 Ç_3 Ç_4$

Anne ve baba yan yana olacağı için 1 kişi kabul edilirler. Anne ve baba 4 çocuk ile birlikte 5 kişi gibi kabul edilip 5! şekilde sıralanırlar. Anne ve baba da kendi aralarında 2! şekilde sıralanacağından sorunun cevabı, 5!.2! = 240 olur.

Tekrarlı Permütasyon

n_1 tanesi kendi aralarında özdeş, n_2 tanesi kendi aralarında özdeş, ..., n_r tanesi kendi aralarında özdeş olmak üzere $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ tane nesnenin n li dizilişlerinin her birine tekrarlı permütasyon denir.

Bu şekilde n tane nesnenin farklı dizilişlerinin sayısı $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_r!}$ bağıntısı ile hesaplanır.

Örnek

"KARKAS" kelimesindeki harfler kullanılarak anlamlı ya da anlamsız 6 harfli kaç farklı kelime yazılabilir?

Çözüm

2 tane K, 2 tane A tekrar etmektedir. Buna göre,

$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 180$

Düzeyli Sorularla Hedefe Doğru /// Namık Karayanık

Örnek

"MATEMATİK" kelimesindeki harfler kullanılarak anlamlı ya da anlamsız 9 harfli

a) T ile başlayıp E ile biten kaç farklı kelime yazılabilir?
b) "TEM" ile başlayan kaç kelime yazılabilir?

Çözüm

a) T yi başta ve E yi sonda sabit tutalım. **T**MAMATİK**E**
O halde, MAMATİK kelimesinde 2 tane M, 2 tane A olup

$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 720}{4} = 7 \cdot 180 = 1260$ kelime yazılabilir.

b) **TEM**ATİKMA, burada ATİKMA kelimesine göre,

$\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$ kelime yazılabilir.

Örnek

3300444 sayısındaki rakamlar kullanılarak 7 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

Çözüm

Verilen sayıdaki 7 rakamdan 2 tanesi 3, 2 tanesi 0 ve 3 tanesi 4 olduğundan

$$\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3!}}=210$$

Ancak sıfır ile başlayan sayılar 7 basamaklı olmadığından bu 210 tane 7 rakamlı sayı grubunun $\frac{5}{7}$ si 7 basamaklı sayı belirtir. O halde, $210\cdot\frac{5}{7}=150$ tane yazılabilir.

Ayraç Yöntemi

Özdeş nesnelerin dağıtımında kullanılan bir yöntemdir.

✓ $r \geq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesne n tane kutuya her bir kutuya istenildiği kadar koymak şartıyla,

$\binom{n+r-1}{n-1}$ farklı şekilde dağıtılabilir.

✓ $r \leq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesne n tane kutuya her bir kutuya istenildiği kadar koymak şartıyla,

$\binom{n+r-1}{r}$ farklı şekilde dağıtılabilir.

✓ $r \geq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesne n tane kutuya her bir kutuda en az bir tane nesne olacak şekilde,

$\binom{r-1}{n-1}$ farklı şekilde dağıtılabilir.

Örnek

5 özdeş kalem 3 çocuğa her birine istenildiği kadar vermek şartıyla kaç değişik biçimde dağıtabilir?

Çözüm

I. YOL:

5 kalemi 3 çocuğa dağıtmak için 2 ayraç kullanırız.

KK / KK / K örnek bir dağılım.

Yani soru aslında 5 özdeş kalem ve 2 özdeş ayracın farklı sıralanışlarının sayısı demektir.
Kalemler K ve ayraçlar A ile gösterilirse, **KKKKKAA** ifadesinin farklı sıralanışların sayısı sorunun cevabıdır.

$$\frac{7!}{5!.2!}=\frac{7.6.\cancel{5!}}{2.\cancel{5!}}=21 \text{ bulunur.}$$

II. YOL:

Şimdi aynı soruyu yukarıda verilen ilk formüle göre yapalım.
$r=5$ ve $n=3$ olduğundan,

$$\binom{3+5-1}{3-1}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2}=21 \text{ bulunur.}$$

III. YOL: (Virgül Yöntemi)

3 çocuk a, b ve c olsun. Bu durumda,
$a+b+c=5$ dir. ($a=0, b=2, c=3$ olabilir. Yani $a,b,c\in N$)
Burada her üç harfe 1 eklenince her biri pozitif tam sayı olur ancak eşitliğin karşısına da 3 eklenmelidir.
$(a+1=x, b+1=y, c+1=z)$

$x+y+z=8$ $\left(x,y,z\in Z^{+}\right)$

Şimdi elimizde 8 adet 1 var ve bu 1 leri 3 kişiye dağıtacağız.

1,1,1,1,1,1,1,1

8 adet 1 i ayırmak için 7 virgül kullanıyoruz. Bunları 3 kişiye dağıtmak için her hangi 2 yere virgül koymak yeterlidir.
O halde, 7 virgülden 2 virgül seçersek istenilen gerçekleşir.

İstenilen cevap, $\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2}=21$ dir.

Örnek

4 özdeş oyuncak 6 çocuğa kaç değişik biçimde dağıtabilir?

Çözüm

Bilgi kutusundaki ikinci formülü uygulayabiliriz. $r=4$ ve $n=6$

$$\binom{6+4-1}{4}=\binom{9}{4}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126 \text{ farklı şekilde dağıtılabilir.}$$

Örnek

10 özdeş kalem 3 çocuğa her birine **en az bir** kalem vermek şartıyla kaç değişik biçimde dağıtabilir?

Çözüm

I. YOL:

Bu sorudaki koşul gereği ilk önce her çocuğa birer kalem verelim. $10-3=7$ kalem kalır.
Daha sonra ilk örnekteki birinci yola benzer şekilde,kalan 7 kalemi 3 çocuğa 2 ayraç ile dağıtabiliriz.

KKKKKKKAA ifadesinin farklı yazılışlarının sayısı, tekrarlı permütasyonla aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\frac{9!}{7!\cdot 2!}=\frac{9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\cdot 2}=36$$

II. YOL:

Şimdi aynı soruyu yukarıda verilen üçüncü formüle göre yapalım. $r=10$ ve $n=3$ olduğundan,

$$\binom{10-1}{3-1}=\binom{9}{2}=\frac{9\cdot 8}{2}=36 \text{ bulunur.}$$

III. YOL: (Virgül Yöntemi)

Her çocuğa en az bir kalem verilecektir. Her kalemi bir virgülle ayırdığımızda 10 kalem için 9 tane virgül yeterlidir. O halde 3 çocuğa bu kalemleri dağıtmak için 9 virgülden istediğimiz 2 virgülü seçmeliyiz.

Yukarıda bir dağıtım örneği görülmektedir. Bu dağıtıma göre, Birinci çocuk 2, ikinci çocuk 5 ve üçüncü çocuk 3 kalem alır. Şimdi bu durumu kombinasyon olarak ifade edelim.
9 virgülden 2 seçim yapılacağına göre,

$$C(9,2)=\binom{9}{2}=\frac{9.8}{2}=36 \text{ bulunur.}$$

Örnek

a,b,c ve d birer doğal sayı olmak üzere, $a+b+c+d=12$ eşitliğini sağlayan kaç farklı (a,b,c,d) sıralı dörtlüsü vardır?

Çözüm

I. YOL:

Bu soruyu, "12 tane özdeş 1 i, 4 farklı sayıya istenildiği kadar dağıtım yapmak şartıyla kaç farklı şekilde dağıtabiliriz?" biçiminde düşünebiliriz. 4 farklı sayı için 3 ayraç gereklidir.
12 özdeş 1 ve 3 ayraç sıralanışı, tekrarlı permütasyonla aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\frac{15!}{12!.3!}=\frac{15.14.13.\cancel{12!}}{\cancel{12!}.3.2}=5.7.13=455$$

II. YOL: (Virgül Yöntemi)

$a+b+c+d=12 \quad (a,b,c,d\in N)$
$(a+1=x,\ b+1=y,\ c+1=z,\ d+1=t)$
$x+y+z+t=16 \quad \left(x,y,z,t\in Z^+\right)$

O halde, $\binom{15}{3}=\dfrac{15.14.13}{3.2.1}=5.7.13=455$ bulunur.

Örnek

$(x+y+z)^{15}$ açılımında kaç farklı terim vardır?

Çözüm

Açılımdaki herhangi bir terim, $k\cdot x^a\cdot y^b\cdot z^c$ biçimindedir.
Bu terimlerin her birindeki kuvvetler toplamı 15 olacağından, $a+b+c=15$ olur. O halde bu soruyu da yukarıdaki sorunun çözümü gibi düşünebiliriz.

Yani "15 tane özdeş 1 i, 3 farklı sayıya istenildiği kadar dağıtım yapmak şartıyla kaç farklı şekilde dağıtabiliriz?" biçiminde düşünebiliriz. 3 farklı sayı için 2 ayraç gereklidir.
15 özdeş 1 ve 2 ayraç sıralanışı, tekrarlı permütasyonla aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\frac{17!}{15!.2!}=\frac{17.16.\cancel{15!}}{\cancel{15!}.2}=17.8=136$$

II. YOL: (Virgül Yöntemi)

$a+b+c=15 \quad (a,b,c\in N)$
$(a+1=x,\ b+1=y,\ c+1=z)$
$x+y+z=18 \quad \left(x,y,z\in Z^+\right)$

O halde, $\binom{17}{2}=\dfrac{17\cdot16}{2}=136$ bulunur.

Örnek

4 madeni 1TL, 6 farklı kumbaraya her birine istenildiği kadar atılmak şartıyla kaç değişik biçimde atılabilir?

Çözüm

I. YOL:

4 tane özdeş 1 TL yi 6 farklı kumbaraya dağıtmak için 5 ayraç gereklidir. O halde paralar P ve ayraçlar A ile yazılırsa, **PPPPAAAAA** yazılışının farklı sıralanışları,

$$\frac{9!}{4!\cdot5!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\cancel{5!}}=126$$

II. YOL: (Virgül Yöntemi)

$a+b+c+d+e+f=4 \quad (a,b,c,d,e,f\in N)$

(Sol tarafta 6 harfin her birine 1 eklenirse, sağda 4 e 6 eklenir.)
$x+y+z+t+m+n=10$
10 tane 1 için 9 virgül kullanılır. 6 ya ayırmak için 5 virgül seçilir.

O halde, $\binom{9}{5}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$ bulunur.

Örnek

$a+b+c=16$ eşitliğini sağlayan kaç farklı (a,b,c) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

Çözüm

Elimizde 16 tane 1 var ve biz bu 1 leri a, b ve c değişkenlerine istediğimiz kadar dağıtacağız. Yani yan yana 16 tane 1 yazalım ve her birinin arasına virgül koyalım. 16 tane 1 için 15 virgül kullanılır. Sonra virgül yönteminde olduğu gibi bu 1 leri üç farklı sayıya dağıtmak için 2 virgül seçmek yeterli olacaktır.

O halde, $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ bulunur.

Dönel (Dairesel) Permütasyon

n elemanlı bir kümenin elemanlarının, bir çember üzerindeki farklı sıralanışlarının her birine, bu kümenin bir dönel permütasyonu denir.

✓ n elemanlı bir kümenin dönel permütasyonlarının sayısı: $P(n-1, n-1) = (n-1)!$ dir.

⊗ Dönel permütasyonda bir kişi sabit tutularak diğerlerinin yerleri değiştirilir. Bunun nedeni şöyle açıklanabilir. Örneğin 3 kişinin yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturabileceğini hesaplayalım. İlk oturuş sırası soldan sağa saat yönünde a,b,c olsun. Daha sonra bunlar saat yönünde herkes bir sonraki kişinin yerine geçecek biçimde yer değiştirsinler. Aslında bu şekilde devam edilirse hep aynı durum oluşur. Farklı bir oturuş sırası olmaz. Oysa a yı sabit tutarak b ile c yi yer değiştirdiğimizde farklı sıralanış elde etmiş oluruz.
Yani $(3-1)! = 2! = 2$ dir.

Örnek

6 kişilik bir aile yuvarlak bir masada kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm

$n = 6$ o halde $(6-1)! = 5! = 120$ farklı şekilde oturabilirler

Örnek

4 doktor 3 hemşire ve 2 mühendis yuvarlak bir masa etrafında aynı meslekten olanlar yan yana oturmak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

Çözüm

Aynı meslekten olanlar ayrılmayacağına göre, doktorları 1, hemşireleri 1 ve mühendisleri 1 kişi gibi düşünelim.
Bu durumda 3 kişinin (grubun) yuvarlak bir masada oturma sayısı, $(3-1)! = 2!$
Doktorlar kendi aralarında 4!
Hemşireler kendi aralarında 3!
Mühendisler kendi aralarında 2!
kadar yer değiştireceğinden, çarpma yoluyla saydığımızda toplam oturma sayısı, $2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 576$ dır.

Anahtarlık Sorularındaki Durum

UYARI !!!

Dönel permütasyonda anahtarlık sorularında yuvarlak masa sorularına göre biraz farklı bir durum vardır. Çünkü bir halkada anahtar dizilimi diğer nesne dizilimlerine göre farklılık gösterir. Halkanın alttan ve üstten görünümü aynı olup bulunan sonuç ikiye bölünür.

Ayrıca maskotlu anahtarlıklarda dairesel bir dizilim de olsa anahtarlar birbirinden ayrılmış olup düz bir sırada dizilim gibi düşünülür fakat alttan ve üstten görünümü aynı olacağından sonuç yine ikiye bölünür.

✓ n farklı anahtar halka biçimindeki maskotsuz bir anahtarlığa $\frac{(n-1)!}{2}$ farklı şekilde dizilebilir.

✓ n farklı anahtar maskotlu bir anahtarlığa $\frac{n!}{2}$ farklı şekilde dizilebilir.

Örnek

7 farklı anahtar dairesel bir anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir?

Çözüm

$\frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = 360$ farklı şekilde takılabilir.

Örnek

5 farklı anahtar dairesel ve maskotlu bir anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir?

Çözüm

$\frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$ farklı şekilde takılabilir.