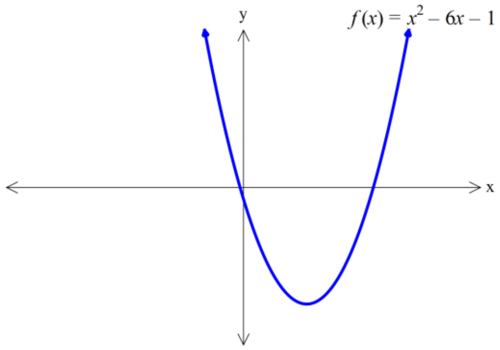
İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonlar

$f(x)=ax^2+bx+c$

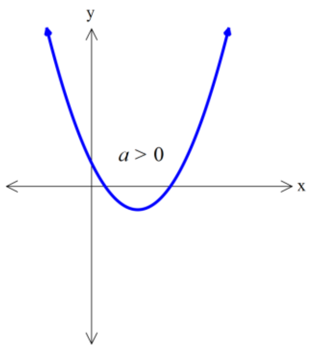
Şeklinde ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiklerine **parabol** adı verilir.

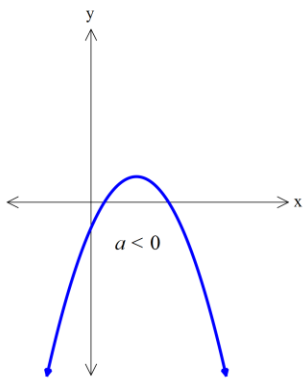
Örnek:

$f(x)=x^2-6x-1$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Not: $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünde $a>0$ ise kollar yukarı, $a<0$ ise kollar aşağı doğru olur.





Örnek:

$f(x)=(m-3)x^3+(n+2)x^2-3x+5$ fonksiyonunun grafiği kolları aşağı yönlü bir parabol ise $m+n$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

Parabol ise, 3.derece bir terim olamaz. Dolayısıyla $m=3$ tür.

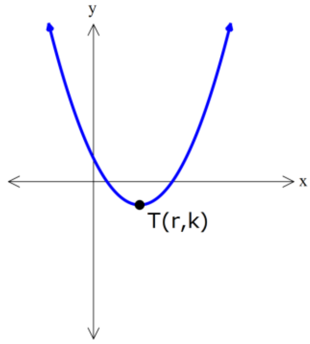
Parabolün kolları aşağıya doğru ise, x^2 nin katsayısı negatiftir. $\Rightarrow n+2<0 \Rightarrow n<-2$ dir.

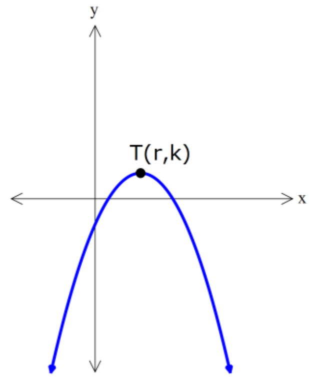
n tam sayı olarak en fazla -3 olur. O halde,

$m+n=3+(-3)=0$ olur en fazla.

Tepe Noktası

Parabolün kollarının durumuna göre en yüksek ya da en alçak noktasıdır.





$f(x)=ax^2+bx+c$ nin tepe noktası $T(r,\ k)$ ise,

$r=-\dfrac{b}{2a}$ dır. Fonksiyonda x yerine r değeri yazılarak k değeri bulunur.

Örnek:

$f(x)=-3x^2+12x+8$ fonksiyonunun tepe noktasını bulunuz.

Çözüm:

$$r=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{-6}=2 \text{ dir.}$$

$$k=f(2)=-3.2^2+12.2+8$$
$$=-12+24+8$$
$$=20 \text{ dir.}$$

Tepe noktası $T(2,\ 20)$ noktasıdır.

Örnek:

$f(x)=(a-1)x^2-(a+2)x+12$ parabolü $(3,\ 9)$ noktasından geçtiğine göre, parabolün tepe noktasını bulunuz.

Çözüm:

$(3,\ 9)$ noktası parabolün bir noktası olduğuna göre, parabol denklemini sağlar. Yerine yazalım.

$9=(a-1).3^2-(a+2).3+12$

$9=9a-9-3a-6+12$

$9=6a-3$

$12=6a \Rightarrow a=2$ dir.

$f(x)=(\underset{2}{a}-1)x^2-(\underset{2}{a}+2)x+12$

$\quad =x^2-4x+12$ dir.

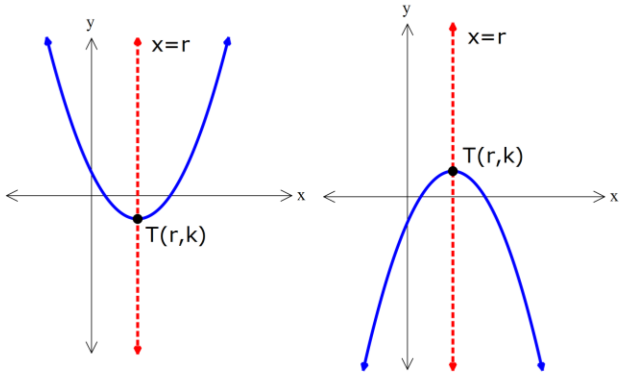
$r=-\dfrac{-4}{2}=2$ dir.

$f(2)=2^2-4.2+12=4-8+12=8$ dir.

Tepe noktası T(2, 8) noktasıdır.

Not: Parabolün simetri ekseni x=r dir. Yani

Simetri ekseni $\Rightarrow$ $x=-\dfrac{b}{2a}$ dır.



Örnek:

$f(x)=x^2-8x+4$ fonksiyonunun simetri ekseni

$x=-\dfrac{-8}{2}=4 \quad \Rightarrow \ x=4$ doğrusudur.

Örnek:

$f(x)=2x^2+kx+9$ parabolünün en küçük değeri 7 ise k'nin pozitif değeri için bu parabolün simetri eksenini bulunuz.

Çözüm:

$r=-\dfrac{k}{2.2}=-\dfrac{k}{4}$ tür.

$f(r)=7$ ise,

$2\cdot\left(-\dfrac{k}{4}\right)^2+k\cdot\left(-\dfrac{k}{4}\right)+9=7$

$\dfrac{k^2}{8}-\dfrac{k^2}{4}=-2$

$\dfrac{k^2-2k^2}{8}=-2$

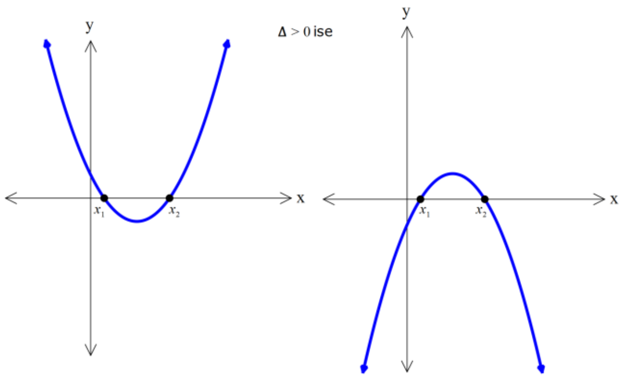
$-k^2=-16 \ \Rightarrow$ k pozitif olduğundan $k=4$ tür.

$2x^2+4x+9$ parabolünün simetri ekseni

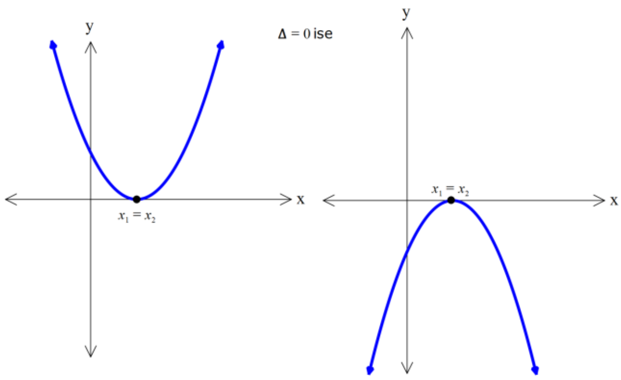
$x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{4}=-1 \quad \Rightarrow \ x=-1$ doğrusudur.

Not:

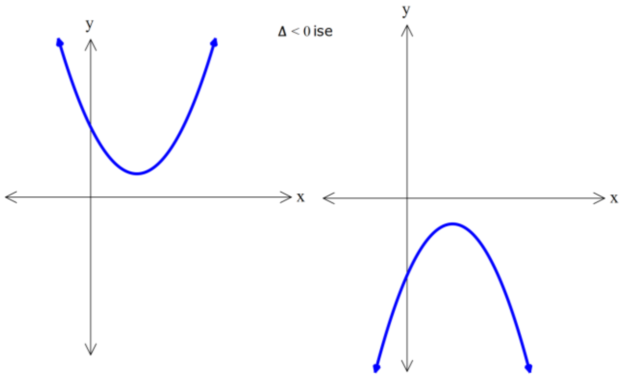
$f(x)=ax^2+bx+c$ denkleminde $\Delta=b^2-4ac>0$ ise x eksenini 2 farklı noktadan keser. Çünkü 2 farklı gerçek kökü vardır. Bu kökler $\Rightarrow \dfrac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ dır.



$\Delta=0$ ise eşit (çakışık) iki kökü vardır. Bu noktada da grafik x eksenine teğettir.



$\Delta<0$ ise gerçek kökü yoktur, x eksenini kesmez.



Örnek:

$f(x)=x^2-4x+m-2$ parabolü x eksenini farklı iki noktada kesiyorsa m'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

$\Delta>0$ olmalıdır.

$b^2-4ac>0$

$(-4)^2-4.1.(m-2)>0$

$16-4m+8>0$

$-4m>-24$

$m<6 \Rightarrow$ m'nin en büyük tamsayı değeri 5 tir.

Örnek:

$f(x)=(k-2)x^2-kx+8$ parabolü x eksenine teğet ise k'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\Delta=0$ olmalıdır.

$(-k)^2-4(k-2).8=0$

$k^2-32(k-2)=0$

$k^2-32k+64=0$

Kökler toplamı $=-\frac{b}{a}=-\frac{-32}{1}=32$ dir.

Örnek:

$f(x)=x^2-mx+10$ parabolü daima pozitif ise, m'nin en büyük tam sayı değeri için, fonksiyonun en küçük değerini bulunuz.

Çözüm:

Daima pozitif ise, x eksenini hiç kesmiyordur.

Yani $\Delta<0$ olmalıdır.

$m^2-4.1.10<0$

$m^2<40$

m'nin en büyük tamsayı değeri 6 dır.

Şimdi fonksiyonun tepe noktasını bulalım.

$x^2-6x+10$ parabolünde $r=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2}=3$ tür.

$f(3)=3^2-6.3+10=9-18+10=1$ dir.

En küçük değeri 1 dir.

Parabolün Çizimi

Parabol çizerken, a'nın işareti çok önemlidir. Daha sonra parabolün eksenleri kestiği noktalar ve tepe noktası gibi önemli noktalar bulunmaya çalışılır. Bulunan noktalar kullanılarak kabaca çizim yapılır.

Örnek:

$f(x)=x^2-4x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

a değeri, yani x^2 li terimin katsayısı 1 dir. Yani pozitiftir. Buna göre parabolün kolları yukarı doğrudur.

İkinci adım olarak parabolün x eksenini kestiği noktaları yani köklerini bulalım.

$x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0$

$\Rightarrow x=0$ ve $x=4$ tür.

Grafik y eksenini $f(0)$ değerinde keser.

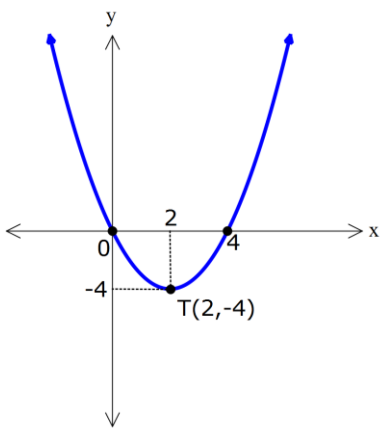
$f(0)=0$ olduğundan grafik orjinden geçer.

Son olarak tepe noktasını bulalım.

$r=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ dir.

$k=f(r)=f(2)=4-8=-4$ tür.

Şimdi grafiği çizebiliriz.



Örnek:

$f(x)=-3x^2+6x-7$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$a < 0$ dır. $\Rightarrow$ Parabolün kolları aşağı doğrudur.

Δ'yı hesaplayalım. Eğer $\Delta < 0$ ise x eksenini kesmez.

$f(x) = -3x^2 + 6x - 7 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4.(-3).(-7)$

$= 36 - 84 = -48 \Rightarrow$ Kökleri yok, x eksenini kesmez.

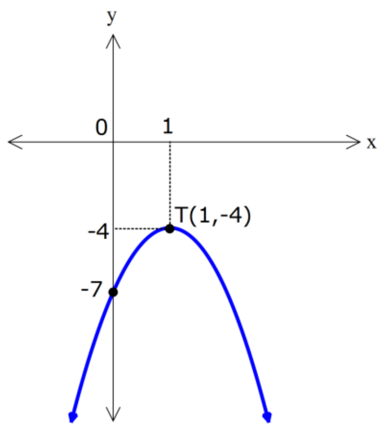
$f(0) = -7$ dir, y eksenini -7'de keser.

Son olarak tepe noktasını bulalım.

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2.(-3)} = 1$ dir.

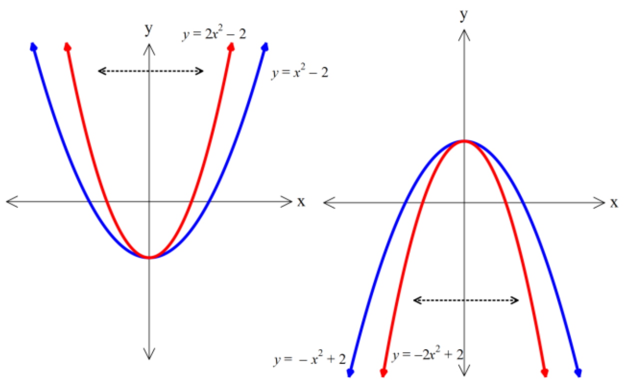
$k = f(1) = -3.1 + 6.1 - 7 = -4$ tür. $\Rightarrow T(1, -4)$

Şimdi grafiği çizebiliriz.



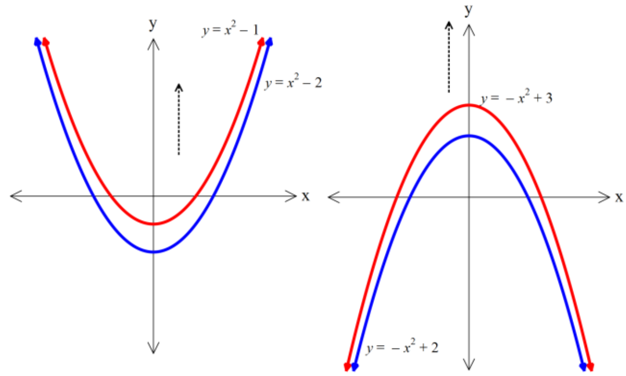
Not:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünde $|a|$ değeri arttıkça parabol kollarının açıklığı azalır.



Not:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünde c değeri arttıkça parabol yukarı ötelenir.



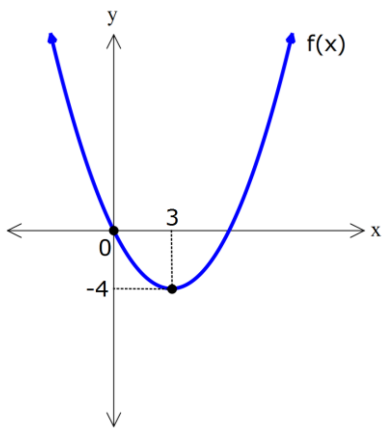
Parabol Grafiğinden Fonksiyonu Yazma

1. Tepe Noktası Biliniyorsa

Tepe noktası $T(r, k)$ olan parabolün denklemi

$f(x) = a(x - r)^2 + k$ şeklindedir.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde parabolün tepe noktası $(3, -4)$ noktasıdır.

$f(x) = a(x - 3)^2 - 4$ şeklinde bir denkleme sahiptir.

Ayrıca, parabol orjinden geçiyor. $(0, 0)$ noktasını sağlamalıdır.

$0 = a(0 - 3)^2 - 4$

$4 = 9a$

$\frac{4}{9} = a$ dır. O halde,

$f(x) = \frac{4}{9}(x - 3)^2 - 4$ tür.

2. Parabolün Üç Noktası Biliniyorsa

y eksenini kesen nokta $(0, y_0)$ olsun.

$f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünde c değeri y_0 dır.

Parabolün içinde bulunan (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) şeklinde iki noktayı daha biliyorsak bunları denklemde yerine yazıp, denklem sistemini çözeriz.

Örnek:

Grafiği $(-1,\ 13)$, $(0,\ 3)$ ve $(1,\ -3)$ noktalarından geçen parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm:

$(0,\ 3)$ noktası nedeniyle $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünde $c=3$ tür.

$f(x)=ax^2+bx+3$ fonksiyonunda

$(-1,\ 13) \Rightarrow 13=a-b+3 \Rightarrow \quad 10=a-b$

$(1,\ -3) \Rightarrow -3=a+b+3 \Rightarrow \underline{-6=a+b}$ topla

$4=2a \Rightarrow a=2$ dir.

$10=\underbrace{a}_{2}-b \Rightarrow b=-8$ dir.

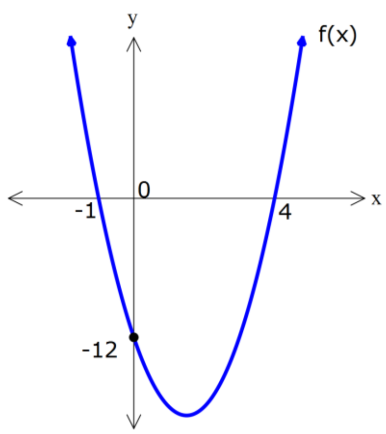
O halde,

$f(x)=2x^2-8x+3$ tür.

Not:

$(x_1,\ 0)$ ve $(x_2,\ 0)$ şeklinde x eksenini kesen noktaları biliyorsak, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ şeklinde denklemi hemen oluşturabiliriz. Ayrıca verilen bir noktayı da bu denkleme yazarak a değerini bulabiliriz.

Örnek:



Yukarıdaki parabol, x eksenini -1 ve $4'$ te kesiyor.

$f(x)=a(x+1)(x-4)$ şeklinde bir denkleme sahiptir.

$(0,\ -12)$ noktasından da geçiyor.

$-12=a.(0+1)(0-4)$

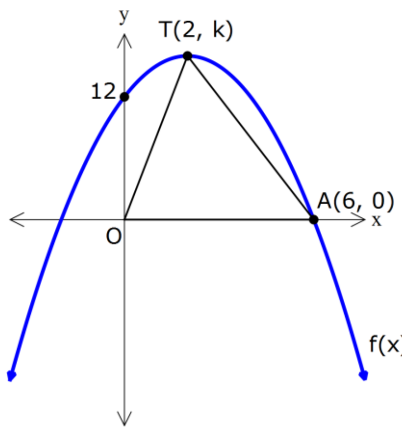
$-12=-4a \Rightarrow a=3$ tür. Buna göre,

$f(x)=3(x+1)(x-4)$

$\quad =3.(x^2-3x-4)$

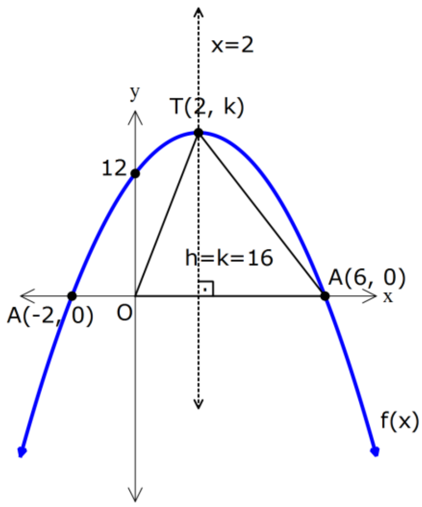
$\quad =3x^2-9x-12$ dir.

Örnek:



Yukarıdaki grafiğe göre, TOA üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



Tepe noktasının apsisi 2 olduğuna göre, $x=2$ doğrusu simetri eksenidir.

$A(6,\ 0)$ noktasının $x=2$ ye göre simetriği $(-2,\ 0)$ noktasıdır. x eksenini kesen 2 noktayı da biliyoruz.

$f(x)=a(x+2)(x-6)$ şeklindedir.

$(0,\ 12)$ noktasından da geçiyor.

$12=a(0+2)\left(0-6\right) \Rightarrow 12=-12a \Rightarrow a=-1$ dir.

$f(x)=-(x+2)(x-6)$ dır.

T(2, k) noktasındaki k değerini bulalım.

$k = -1(2+2)(2-6) = -4.(-4) = 16$ dır.

Üçgenin yüksekliği 16, tabanı 6 birim ise,

$A(TOA) = \dfrac{6.16}{2} = 48 \text{ br}^2$ dir.

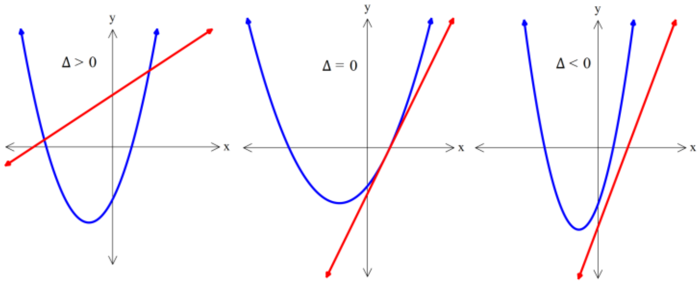
Bir Doğru ile Bir Parabolün Birbirine Göre Durumu

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusu birbirine eşitlendiğinde oluşan denklemde

$\Delta > 0$ ise iki farklı noktada kesişirler.

$\Delta = 0$ ise doğru, parabole teğettir.

$\Delta < 0$ ise doğru ile parabol kesişmezler.



Ortak çözümden gelen x değerleri kesişim noktalarının apsisleridir. Daha sonra bu x değerleri herhangi bir denklemde yerine yazılarak y değerleri bulunabilir.

Örnek:

$f(x) = x^2 + 3x - 5$ parabolü ile $y = x + 3$ doğrusu kesi- şiyor mu? Varsa kesişim noktalarını bulunuz.

Çözüm:

Denklemleri birbirine eşitleyelim.

$x^2 + 3x - 5 = x + 3$

$x^2 + 2x - 8 = 0$ $\quad \Delta$'ya bakalım.

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.1.(-8) = 4 + 32 = 36$

$\Delta > 0$ olduğu için 2 noktada kesişirler.

$x^2 + 2x \underset{(4).(-2)}{-8} = 0$ denklemini çözelim.

$(x+4)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -4$ ve $x = 2$ 'de kesişirler.

Ordinatlarını da bulalım.

$x = -4$ için $\Rightarrow y = \underbrace{x+3}_{-4} = -1$ dir. $\Rightarrow (-4, -1)$ noktası

$x = 2$ için $\Rightarrow y = \underbrace{x+3}_{2} = 5$ tir. $\Rightarrow (2, 5)$ noktası

Kesişim noktaları $\Rightarrow$ $(-4, -1)$ ve $(2, 5)$ noktalarıdır.

Örnek:

$y = 4x - 5$ doğrusu $f(x) = x^2 + mx - 4$ parabolüne teğet olduğuna göre, m'nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

Çözüm:

Denklemleri birbirine eşitleyelim.

$x^2 + mx - 4 = 4x - 5$

$x^2 + (m-4)x + 1 = 0$ $\quad$ Teğet olduğundan $\Delta = 0$ dır.

$(m-4)^2 - 4.1.1 = 0$

$(m-4)^2 = 4$

$m - 4 = 2$ $\quad$ veya $\quad$ $m - 4 = -2$

$m = 6$ dır. $\quad\quad$ $m = 2$ dir.

$\Rightarrow$ m değerleri toplamı $6 + 2 = 8$ dir.

Örnek:

$f(x) = -x^2 + x + m$ parabolü ile $y = 3x - m$ doğrusu kesişmediğine göre m'nin en büyük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm:

Denklemleri birbirine eşitleyelim.

$-x^2 + x + m = 3x - m$

$-x^2 - 2x + 2m = 0$ $\quad \Delta < 0$ olmalıdır.

$(-2)^2 - 4.(-1).2m < 0$

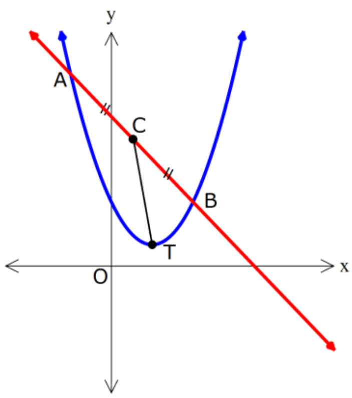
$4 + 8m < 0 \Rightarrow 8m < -4 \Rightarrow m < -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ m tam sayı olarak en fazla -1 olur.

Örnek:

$y = x^2 - 4x + 6$ parabolü ile $y = -2x + 14$ doğrusu A ve B noktalarında kesişmektedir. [AB] nin orta noktası- nın parabolün tepe noktasına olan uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm:



Denklemleri birbirine eşitleyelim.

$x^2-4x+6=-2x+14$

$x^2-2\underbrace{x\ -8}_{(-4).2}=0$

$(x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x=4$ ve $x=-2$ de kesişirler.

A ile B nin orta noktası C olsun.

C'nin apsisi bunların ortalamasıdır. $\Rightarrow \dfrac{4+(-2)}{2}=1$

C noktası, doğru üzerinde olduğu için $x=1$ yazarak ordinatını bulabiliriz. $y=-2\underbrace{x}_{1}+14=12$ dir.

C(1, 12) noktasıdır.

Şimdi parabolün tepe noktasını bulalım.

$r=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4}{2}=2$

$k=\underbrace{x^2}_{2}-4\underbrace{x}_{2}+6=4-8+6=2$ dir.

C(1, 12) ile T(2, 2) arası mesafeyi hesaplayalım.

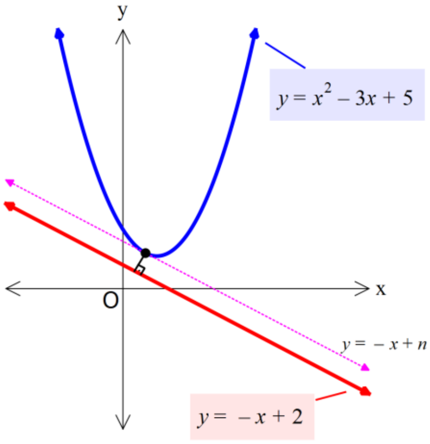
$\sqrt{(1-2)^2+(12-2)^2}=\sqrt{1+10^2}=\sqrt{1+100}$

$=\sqrt{101}$ birimdir.

Örnek:

$y=x^2-3x+5$ parabolünün ile $y=-x+2$ doğrusuna en yakın olduğu noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



Parabolün doğruya en yakın olduğu nokta, parabol ile bu noktadaki teğetinin kesişim noktasıdır.

Teğet ile $y=-x+2$ doğrusu birbirine paraleldir.

Dolayısıyla teğet doğrusuna $y=-x+n$ diyebiliriz.

$y=-x+n$ ile $y=x^2-3x+5$ in ortak çözümünde $\Delta=0$ olmalıdır.

$x^2-3x+5=-x+n$

$x^2-2x+5-n=0$

$\Delta=(-2)^2-4.1.(5-n)=0$

$4-20+4n=0$

$4n=16$

$n=4$ tür.

$y=x^2-3x+5$ ile $y=-x+4$ ün kesişim noktasını bulalım.

$x^2-3x+5=-x+4$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ dir.

$x=1$ için $y=-\underbrace{x}_{1}+4=3$ tür.

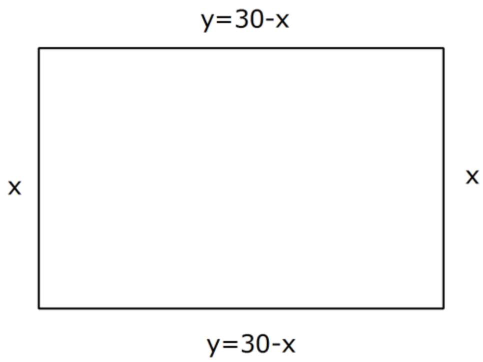
$\Rightarrow$ En yakın nokta (1, 3) noktasıdır.

Problem Çözümünde Parabolün Kullanılması

Örnek:

Çevresi 60 m olan dikdörtgen şeklinde bir bahçenin alanı en fazla kaç m^2 dir?

Çözüm:



Bahçenin farklı kenarları x ve y olsun.

$2(x+y)=60$ ise $\Rightarrow x+y=30 \Rightarrow y=30-x$ tir.

Alan $=x.y=x.(30-x)=-x^2+30x$ tir.

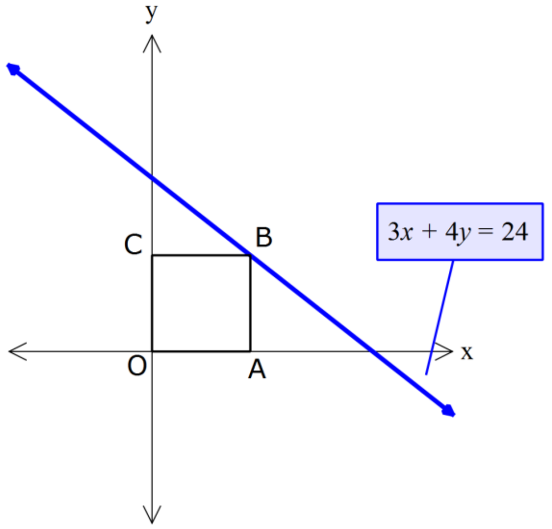
$f(x)=-x^2+30x$ şeklinde bir parabolün tepe noktasını bulabiliriz.

$r=-\dfrac{30}{2.(-1)}=15$ tir.

Maksimum değeri f(15) tir.

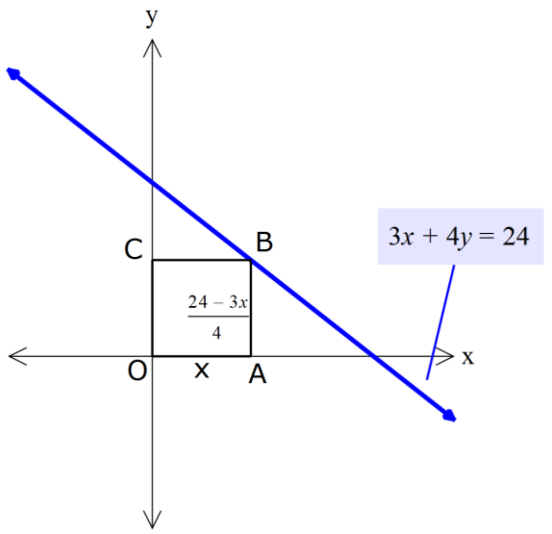
$f(15)=-15^2+30.15=-225+450=225\ m^2$ buluruz.

Örnek:



Şekildeki OABC dikdörtgeninin B köşesi $3x+4y=24$ doğrusu üzerinde olmak üzere A(OABC) maksimum kaçtır?

Çözüm:



B noktasının apsisi x olsun. y değerini doğru denkleminden yazabiliriz.

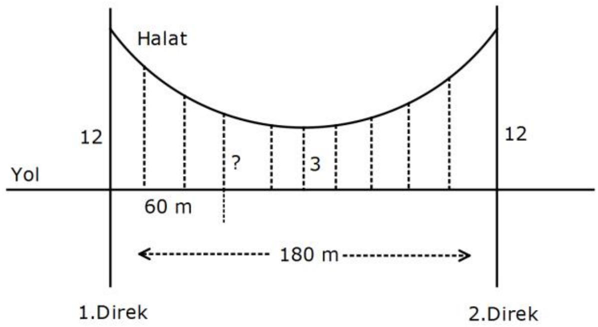
$$3x+4y=24 \Rightarrow 4y=24-3x \Rightarrow y=\frac{24-3x}{4} \text{ tür.}$$

$$A(OABC)=x\cdot\frac{24-3x}{4}=\frac{-3x^2}{4}+6x \text{ tir.}$$

$$r=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\cdot\frac{-3}{4}}=\frac{6}{\frac{3}{2}}=\frac{12}{3}=4 \text{ tür.}$$

$$x=4 \text{ için } A(OABC)=\frac{-3x^2}{4}+6x=-\frac{3.16}{4}+24$$
$$=-12+24=12 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

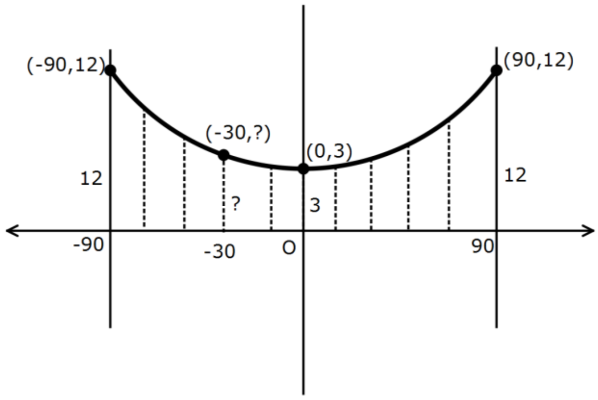
Örnek:



Yukarıdaki şekildeki köprünün ayakları arası mesafe 180 m olup, köprülerin arasındaki parabolik halatın yol ile arasındaki mesafe en az 3 m, en fazla 12 m'dir. 1. köprü ayağından yatay olarak 60 metre uzakta olan halatın yol ile arasındaki mesafe kaç metredir?

Çözüm:

Halatın en alçak noktası, parabolün tepe noktasıdır. y ekseni burdan geçecek şekilde, x ekseni de yol olacak şekilde bir analitik düzlem oluşturabiliriz.



Tepe noktası (0, 3) noktasıdır. Halat,

$$y=a(x-0)^2+3$$
$$=ax^2+3 \text{ şeklinde bir denkleme sahiptir.}$$

(90, 12) noktasını da sağlamalıdır.

$$12=a.90^2+3$$

$$9=a.8100 \Rightarrow a=\frac{1}{900} \text{ dür.}$$

Direkten 60 metre uzaktaki yer, orjinden 30 metre uzaktadır. Yani apsisi -30 dur.

$$x=-30 \text{ için } \Rightarrow \frac{1}{900}x^2+3=\frac{1}{900}\cdot 900+3=1+3$$
$$=4 \text{ m bulururuz.}$$