

Oran

$b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ ifadesine a'nın b'ye oranı denir.

- a ve b aynı birimde olmalıdır.
3 elmanın 4 portakala oranı olmaz.
- Oran, birimsizdir.

3 elmanın 4 elmaya oranı $\frac{3}{4}$ tür.

- $\frac{a}{b}$ ifadesi a:b olarak da gösterilebilir.

Örnek:

$2x = 3y$ ise $\frac{x+2y}{x-2y}$ oranı kaçtır?

Çözüm:

$x = 3k$ olsun.

$$2x = 3y \Rightarrow 6k = 3y \Rightarrow y = 2k \text{ olur.}$$

Sorulan ifadede bunları kullanırsak,

$$\frac{x+2y}{x-2y} = \frac{3k+4k}{3k-4k} = \frac{7k}{-k} = -7 \text{ buluruz.}$$

Orantı

İki veya daha fazla oranın eşitliğine orantı denir.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad (a:b=c:d=k) \text{ gibi.}$$

$k \Rightarrow$ Orantı sabitidir.

$$\overbrace{a:b=c:d}^{\text{Dışlar}} \Rightarrow \underbrace{b.c=a.d}_{\text{İçler}} \left(\begin{array}{l} \text{İçler çarpımı dışlar} \\ \text{çarpımına eşittir.} \end{array} \right)$$

Örnek:

$$\frac{a}{20} = \frac{12}{15} \text{ ise } a \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$a \cdot \frac{15}{20} = 12 \cdot \frac{4}{10} \text{ olmalıdır.}$$

$$a \cdot 3 = 48$$

$$a = 16 \text{ dır.}$$

Örnek:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = 6 \text{ olduğuna göre, } x+2y \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\frac{x}{4} = 6 \text{ ise } x = 24 \text{ tür.}$$

$$\frac{y}{7} = 6 \text{ ise } y = 42 \text{ dir.}$$

$$x+2y = 24+42 = 66 \text{ dır.}$$

Örnek:

$$\frac{x+y}{y} = 3 \text{ ve } \frac{y-z}{z} = 4 \text{ ise } \frac{2x-z}{y} \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\frac{y-z}{z} = 4 \text{ ise } \Rightarrow \frac{y}{z} - \frac{z}{z} = 4 \Rightarrow \frac{y}{z} - 1 = 4 \Rightarrow \frac{y}{z} = 5 \Rightarrow y = 5z \text{ dir.}$$

$$\frac{x+y}{y} = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{y} = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} + 1 = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y \text{ dir.} \Rightarrow x = 10z \text{ dir. Buna göre,}$$

$$\frac{2x-z}{y} = \frac{2 \cdot 10z - z}{5z} = \frac{20z - z}{5z} = \frac{19z}{5z} = \frac{19}{5} \text{ tir.}$$

Örnek:

Bir okuldaki kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranı $\frac{8}{9}$, öğretmenlerin sayısının kız

öğrencilerin sayısına oranı $\frac{1}{6}$ dır. Bu okulda toplam 510 öğrenci olduğuna göre, kaç öğretmen vardır?

Çözüm:

Öğretmenlerin sayısına k diyelim.

Kız öğrencilerin sayısı 6k olur.

$$\frac{\text{Kız Öğrenciler}}{\text{Erkek Öğrenciler}} = \frac{8}{9} \text{ ise } \frac{6k}{\text{Erkek Öğrenciler}} = \frac{8}{9}$$

$$4 \cdot (\text{Erkek Öğrenciler}) = 27k$$

$$\text{Erkek Öğrenciler} = \frac{27k}{4} \text{ olur.}$$

510 öğrenci varsa,

$$\frac{27k}{4} + 6k = 510$$

$$\frac{27k + 24k}{4} = 510$$

$$\frac{51k}{4} = 510$$

$$k = 40 \text{ tir. (Öğretmen Sayısı)}$$

Üçlü Orantı

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \text{ veya } a:b:c = d:e:f \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Örnek:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \text{ ve } a-2b+3c=18 \text{ ise } a \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k \text{ olsun.}$$

$$a=2k, b=4k \text{ ve } c=5k \text{ olur.}$$

$$a-2b+3c=18 \text{ ise}$$

$$2k-2.4k+3.5k=18$$

$$2k-8k+15k=18$$

$$9k=18$$

$$k=2 \text{ dir. } \Rightarrow a=2k=2.2=4 \text{ tür.}$$

Örnek:

$$x, y, z \text{ sayıları sırasıyla } 2, 3 \text{ ve } \frac{1}{2} \text{ ile orantılıdır.}$$

$$x-y+z=-20 \text{ olduğuna göre, } b \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{\frac{1}{2}} \text{ dir. Bu orantının sabiti } k \text{ olsun.}$$

$$x=2k, y=3k, z=\frac{k}{2} \text{ dir.}$$

$$x-y+z=-20 \text{ ise}$$

$$2k-3k+\frac{k}{2}=-20$$

$$-\frac{k}{2}=-20 \Rightarrow k=40 \text{ tır.}$$

$$y=3k=3.40=120 \text{ dir.}$$

Not: Bir orantıda payları kendi arasında, paydaları da kendi arasında toplarsak orantı sabiti değişmez.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k \text{ ise } \frac{a+b+c}{d+e+f} = k \text{ dir.}$$

0 dan farklı katsayılarla kesirleri genişletirsek:

$$\frac{x.a}{x.d} = \frac{y.b}{y.e} = \frac{z.c}{z.f} = k \text{ ise } \frac{x.a+y.b+z.c}{x.d+y.e+z.f} = k \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{2}{3}$$

$$2a-b+3c=16$$

$$e-3f=6 \text{ ise } a \text{ kaçtır?}$$

Çözüm:

Orantıdaki kesirleri uygun katsayılarla genişletelim.

$$\frac{2a}{2d} = \frac{-b}{-e} = \frac{3c}{3f} = \frac{2}{3} \text{ olur. Pay ve paydayı kendi arasında toplarsak}$$

$$\frac{2a-b+3c}{2d-e+3f} = \frac{2}{3} \text{ olur. } 2a-b+3c=16 \text{ bilgisini kullanalım.}$$

$$\frac{16}{2d-(e-3f)} = \frac{2}{3} \text{ olur. } e-3f=6 \text{ bilgisini kullanalım.}$$

$$\frac{16}{2d-6} = \frac{2}{3}$$

$$2d-6=24 \Rightarrow 2d=30 \Rightarrow d=15 \text{ tir.}$$

Başlangıçtaki orantıyı kullanırsak,

$$\frac{a}{d} = \frac{2}{15} \Rightarrow 3a=30 \Rightarrow a=10 \text{ dur.}$$

Not: Orantıdaki kesirlerin kaçınıcı kuvvetini aldıysak, orantı sabitinin de o kuvvetini almalıyız.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k \text{ ise } \frac{a^n}{d^n} = \frac{b^n}{e^n} = \frac{c^n}{f^n} = k^n \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \text{ ve } a^2-b^2+2c^2=172 \text{ ise } a+b \text{ kaçtır?}$$

(a, b ve c pozitifdir.)

Çözüm:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k \text{ ise } \frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{16} = \frac{c^2}{25} = k^2 \text{ dir.}$$

$$a^2=9k^2, b^2=16k^2 \text{ ve } c^2=25k^2 \text{ dir.}$$

$$a^2-b^2+2c^2=172 \text{ ise}$$

$$9k^2-16k^2+2.25k^2=172$$

$$9k^2-16k^2+50k^2=172$$

$$43k^2=172$$

$$k^2=4 \Rightarrow k=2 \text{ dir.}$$

$$a+b=3k+4k=7k=7.2=14 \text{ tür.}$$

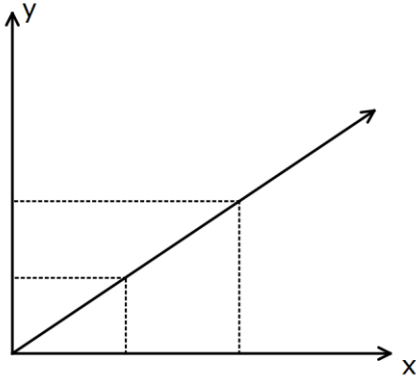
Orantı Çeşitleri

Doğru Orantı

İki çokluktan biri artarken diğeri de artıyorsa veya biri azalırken diğeri de azalıyorsa doğru orantı vardır.

x ile y doğru orantılı ise $\frac{x}{y}$ şeklinde gösterilebilir.

Doğru orantı grafikleri ise aşağıdaki gibidir:



Örnek:

(x + 2) sayısı (2y - 3) sayısı ile doğru orantılıdır.
x = 4 iken y = 3 ise x = 6 iken y kaçır?

Çözüm:

$$\frac{x+2}{2y-3} = k \text{ dir. İlk bilgiden k'yı bulalım.}$$

$$\frac{x+2}{2y-3} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow k=2 \text{ dir.}$$

İkinci bilgiden y'yi bulabiliriz artık.

$$\frac{x+2}{2y-3} = 2 \Rightarrow \frac{8}{2y-3} = 2 \Rightarrow 2y-3=4 \Rightarrow y=\frac{7}{2} \text{ dir.}$$

Not: a ile b ve c ile d doğru orantılı ise,

$$\begin{array}{ccc} a & \searrow & b \\ c & \nearrow & d \end{array}$$

D.O: $a.d=c.b$ dir. (Çapraz çarpımları eşittir.)

Örnek:

Bir araba 12 lt yakıt ile 200 km gitmektedir. 300 km uzunluğundaki bir yol için ne kadar yakıt gerekir?

Çözüm:

$$\begin{array}{ccc} 12 \text{ lt} & \searrow & 200 \text{ km} \\ x \text{ lt} & \nearrow & 300 \text{ km} \end{array}$$

$$\text{D.O: } 12 \cdot \frac{300}{200} = x \cdot \frac{200}{200} \text{ dir.}$$
$$36 = 2x \Rightarrow x = 18 \text{ lt dir.}$$

Not: Sadece "orantılıdır" diye belirtiliyorsa bundan doğru orantıyı anlayacağız.

Örnek:

x, y ve z sayıları sırasıyla 2, 3 ve 5 ile orantılıdır.
 $x+2y-z=24$ ise $x-y$ kaçır?

Çözüm:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k \text{ dir.}$$

$$x+2y-z=24 \text{ ise}$$

$$2k+2 \cdot 3k-5k=24$$

$$2k+6k-5k=24$$

$$3k=24 \Rightarrow k=8 \text{ dir.}$$

$$x-y=2k-3k=-k=-8 \text{ dir.}$$

Örnek:

Ali, Burak ve Ceyhun sırasıyla 21, 24 ve 27 yaşlarında. Kendilerine 240 000 TL miras kalmıştır ve yaşlarıyla orantılı olarak bunu paylaşmaya karar vermişlerdir. Burak'ın payı, Ceyhun'dan ne kadar eksiktir?

Çözüm:

$$\frac{A}{21} = \frac{B}{24} = \frac{C}{27} \text{ orantısını kurabiliriz. İşlemleri kolay-$$

laştırmak için her tarafı 3 ile çarpalım. Paydalar küçülmüş olur.

$$\frac{A}{7} = \frac{B}{8} = \frac{C}{9} \text{ olur. Bu orantının sabitine k diyelim.}$$

$$A=7k, B=8k \text{ ve } C=9k \text{ olur.}$$

Toplamları 240 000 TL olmalıdır.

$$7k+8k+9k=240\,000$$

$$24k=240\,000 \Rightarrow k=10\,000 \text{ TL dir.}$$

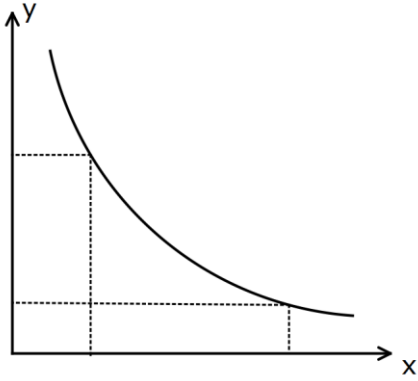
$$\text{Ceyhun}-\text{Burak}=9k-8k=k=10\,000 \text{ TL dir.}$$

Ters Orantı

İki çokluktan biri artarken diğeri azalıyorsa veya biri azalırken diğeri artıyorsa burada ters orantı vardır.

x ile y ters orantılı ise $x.y=k$ şeklinde gösterebiliriz.

Ters orantı grafikleri ise aşağıdaki gibidir:



Örnek:

$(x-2)$ sayısı $(y+3)$ sayısı ile ters orantılıdır.
 $x=4$ iken $y=3$ ise $x=6$ iken y kaçtır?

Çözüm:

$(x-2).(y+3)=k$ şeklinde bir ilişki vardır.

İlk önce k'yı bulalım.

$$\underset{4}{(x-2)}.\underset{3}{(y+3)}=2.6=12 \Rightarrow k=12 \text{ dir.}$$

İkinci bilgidan y'yi bulabiliriz.

$$\underset{6}{(x-2)}.(y+3)=12 \Rightarrow 4.(y+3)=12 \Rightarrow y+3=3 \Rightarrow y=0 \text{ dir.}$$

Not: a ile b ve c ile d ters orantılı ise,

$$a \rightarrow b$$

$$c \rightarrow d$$

T.O: $a.b=c.d$ dir. (Yatay çarpımları eşittir.)

Örnek:

2 işçinin 6 saatte fayans döşediği bir zemini 3 işçi kaç saatte bitirebilirdi?

Çözüm:

$$2 \text{ işçi} \rightarrow 6 \text{ saat}$$

$$3 \text{ işçi} \rightarrow x \text{ saat}$$

$$\text{T.O: } 2.6=3.x \Rightarrow 12=3x \Rightarrow x=4 \text{ saattir.}$$

Örnek:

x, y ve z sayıları sırasıyla 3, 4 ve 6 ile ters orantılıdır.
 $x-y+2z=15$ ise x kaçtır?

Çözüm:

$3x=4y=6z$ şeklinde bir eşitlik vardır.

Bu eşitliği 3, 4 ve 6'nın en küçük ortak katına eşitleyelim. EKOK(3, 4, 6)=12 dir.

$3x=4y=6z=12k$ şeklinde yazarsak,

$x=4k, y=3k$ ve $z=2k$ olur. Buna göre,

$$x-y+2z=15$$

$$4k-3k+2.2k=15$$

$$4k-3k+4k=15$$

$$5k=15$$

$$k=3 \text{ tür.}$$

$$x=4.k=4.3=12 \text{ dir.}$$

Örnek:

Bir traktörün ön tekerliğinin yarıçapının, arka tekerliğinin yarıçapına oranı $\frac{3}{8}$ dir. Bu traktörün arka tekerleği 75 kez döndüğünde ön tekerlek kaç kere dönmüştür?

Çözüm:

İki tekerlek de aynı yolu gitmektedir.

Tekerleğin yarıçapı azaldıkça, dönüş sayısı artacaktır.

Yani ters orantı vardır.

Ön tekerleğin yarıçapı 3r iken, arka tekerleğin yarıçapı 8r olur.

$$8r \rightarrow 75 \text{ kez}$$

$$3r \rightarrow x$$

$$\text{T.O: } 8r.75=3r.x \Rightarrow 8.\overset{25}{75}=\cancel{3}.x \Rightarrow x=200 \text{ dür.}$$

Birleşik Orantı

Birden fazla orantı varsa, bu bir birleşik orantıdır.

x ile y doğru, z ile ters orantılı ise $\frac{x.z}{y}=k$ dir.

Örnek:

$(x+1)$ sayısı $(y+2)$ sayısı ile doğru, $(z-2)$ ile ters orantılıdır.

$x=4, y=3$ iken $z=6$ olduğuna göre,

$x=2, y=4$ iken z kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{x+1}{y+2} \cdot (z-2) = k \text{ şeklinde bir eşitlik vardır.}$$

İlk bilgidan k'yı bulalım.

$$\frac{x+1}{y+2} \cdot (z-2) = \frac{5}{5} \cdot 4 = 4 \Rightarrow k=4 \text{ tür.}$$

İkinci bilgide z'yi bulabiliriz.

$$\frac{x+1}{y+2} \cdot (z-2) = 4 \Rightarrow \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot (z-2) = 4 \Rightarrow z-2=8 \Rightarrow z=10 \text{ dur.}$$

Örnek:

1000 tane halıyı 4 makine günde 8 saat çalışarak 5 günde bitirmektedir. 1500 halıyı günde 12 saat çalışarak 5 makine kaç günde bitirir?

Çözüm:

Halı miktarı arttıkça gün sayısı artar .(Doğru Orantı)
Makina sayısı arttıkça gün sayısı azalır .(Ters Orantı)
Günlük çalışma saati arttıkça gün sayısı azalır .(T.O.)

$$\begin{array}{l} 1000 \text{ halı} \searrow \nearrow 4 \text{ makina} \rightarrow 8 \text{ saat} \rightarrow 5 \text{ gün} \\ 1500 \text{ halı} \nearrow \searrow 5 \text{ makina} \rightarrow 12 \text{ saat} \rightarrow x \text{ gün} \end{array}$$

$$\frac{1000}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot x = \frac{1500}{3} \cdot \frac{8}{5} \cdot 5 \text{ eşitliğini kurabiliriz.}$$
$$24x = 96 \Rightarrow x = 4 \text{ gün buluruz.}$$

II. Yol:

$$\frac{1. \text{Yapılan İş}}{\text{Bu işle ilgili diğer bilgiler}} = \frac{2. \text{Yapılan İş}}{\text{Bu işle ilgili diğer bilgiler}}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1000}{4.8.5} = \frac{1500}{6.9.x} \\ \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{12}{3} \cdot x = \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} \cdot \frac{8}{5} \cdot 5 \\ 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} = \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot x \\ x = 4 \text{ günde bitirir.} \end{array}$$

Örnek:

a ve b sayıları sırasıyla 3 ve 4 ile doğru, c sayısı ise 2 ile ters orantılıdır.
 $3a - 2b + c = 12$ ise b kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = 2c \text{ şeklinde eşitlik kurabiliriz.}$$

$$a = 6c \text{ ve } b = 8c \text{ dir.}$$

$$3a - 2b + c = 12 \text{ ise}$$

$$\frac{6c}{6c} - \frac{16c}{8c} + c = 12$$

$$3c = 12 \Rightarrow c = 4 \text{ tür.}$$

$$b = 8c = 8 \cdot 4 = 32 \text{ dir.}$$

Aritmetik Ortalama

n tane sayının toplamını n'ye bölersek aritmetik ortalamayı buluruz.

$$\text{Aritmetik Ortalama} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ dir.}$$

Örnek:

3 öğrenci bir sınavda 100, 104 ve 111 net yapmışlardır. O halde, ortalama kaç net yapmışlardır?

Çözüm:

$$\frac{100 + 104 + 111}{3} = \frac{315}{3} = 105 \text{ tir.}$$

Not: n tane sayının aritmetik ortalaması x ise, bu sayıların toplamı n.x tir.

Örnek:

5 kişilik bir grubun yaş ortalaması 22 dir. Bu gruba yaş ortalaması 29 olan iki kişi katılırsa yeni yaş ortalaması kaç olur?

Çözüm:

$$5 \text{ kişinin yaşları toplamı} = 5 \cdot 22 = 110 \text{ dur.}$$

$$\text{Sonradan gelen 2 kişinin yaşları toplamı} = 2 \cdot 29 = 58$$

$$\text{O halde 7 kişinin yaşları toplamı} = 110 + 58 = 168 \text{ dir.}$$

$$\text{Yeni Ortalama} = \frac{168}{7} = 24 \text{ tür.}$$

Not: n tane sayının aritmetik ortalaması x ise, bu sayıların her biri A ile çarpılıp, her birine B eklenirse yeni ortalama $Ax+B$ olur.

Örnek:

Anne, baba ve 2 çocuktan oluşan 4 kişilik bir ailenin yaş ortalaması 25 tir. 5 yıl sonra yaş ortalaması kaç olur?

Çözüm:

Her biri 5'er yaş artacağı için yeni yaş ortalaması $25 + 5 = 30$ olur.

Geometrik Ortalama

n tane sayının çarpımını n.dereceden kökünü alırsak, geometrik ortalamayı buluruz.

Geometrik Ortalama $= \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ dir.

Örnek:

$x = 4$ ve 9'un geometrik ortalaması

$y = 4, 9$ ve 48'in geometrik ortalaması

olmak üzere, $\frac{x}{y}$ kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9}}{\sqrt[3]{4 \cdot 9 \cdot 48}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 16 \cdot 3}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 \cdot 3}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3}} = \frac{6}{2^2 \cdot 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Not: Aritmetik ortalaması ile geometrik ortalaması eşit olan iki sayı birbirine eşittir.

Örnek:

$3a+b+12$ ile $a-b-8$ in aritmetik ortalaması ile geometrik ortalaması birbirine eşit ise a ile b nin aritmetik ortalaması kaçtır?

Çözüm:

Bu sayılar birbirine eşittir.

$$3a+b+12 = a-b-8$$

$$2a+2b = -20$$

$$a+b = -10 \text{ dur.}$$

a ile b nin aritmetik ortalaması

$$\frac{a+b}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ tir.}$$

Orta Orantılı

a ve b pozitif olmak üzere,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x \text{ sayısı, a ve b nin orta orantılısıdır.}$$

$$x^2 = a \cdot b \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot b} \text{ dir.}$$

Örnek:

3 ile 12 nin orta orantılısı x olduğuna göre, x ile 12 nin aritmetik ortalaması kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \text{ dir.}$$

x ile 12 nin aritmetik ortalaması

$$\frac{x+12}{2} = \frac{6+12}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ dur.}$$