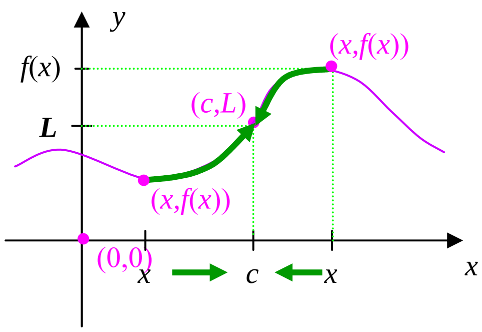
DERS 5
Limit Süreklilik ve Türev

5.1. Limit. Bir f fonksiyonu; c , $L \in \mathbf{R}$ verilmiş olsun.

Eğer x in c ye yakın (her iki taraftan da) her değeri için $f(x)$ sayısı L ye yakın oluyorsa, L sayısına x sayısı c ye yaklaşırken f fonksiyonunun **limit**i (the limit of f as x approaches c) denir ve

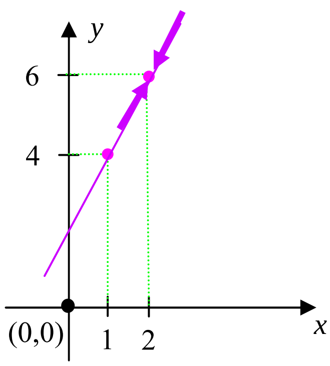
$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ veya } x \to c \text{ için } f(x) \to L$$

yazılır.



Örnek. $\lim_{x\to 2}(2x+2) = ?$

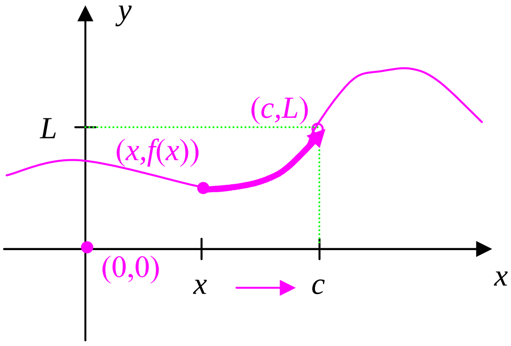
$\lim_{x\to 2}(2x+2) = 6.$



Eğer x in c ye yakın fakat c den küçük her değeri için $f(x)$ sayısı L ye yakın oluyorsa, L sayısına x sayısı c ye soldan yaklaşırken f fonksiyo-nunun limiti (the limit of f as x approaches c from the left) denir ve

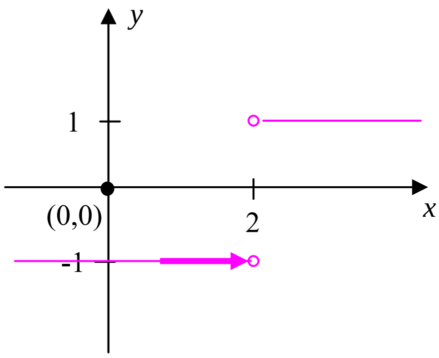
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \text{ veya } x \to c^- \text{ için } f(x) \to L$$

yazılır.



Örnek. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = ?$

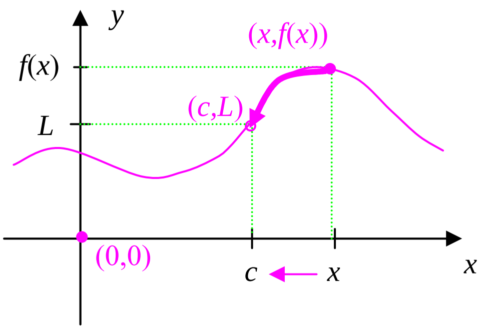
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = -1$$



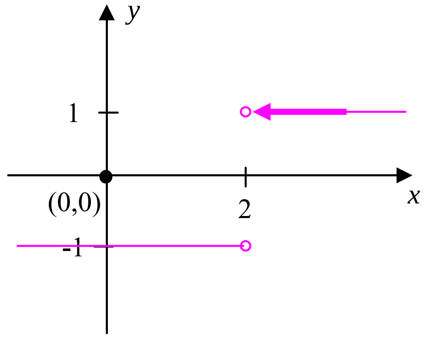
Eğer x in c ye yakın fakat c den büyük her değeri için $f(x)$ sayısı L ye yakın oluyorsa, L sayısına x sayısı c ye sağdan yaklaşırken f fonksiyo-nunun limiti (the limit of f as x approaches c from the right) denir ve

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L \text{ veya } x \to c^+ \text{ için } f(x) \to L$$

yazılır.

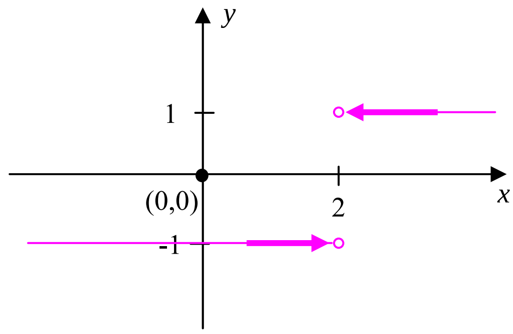


Örnek. $\displaystyle \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = ?$



$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = 1$$

Örnek. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2} = ?$



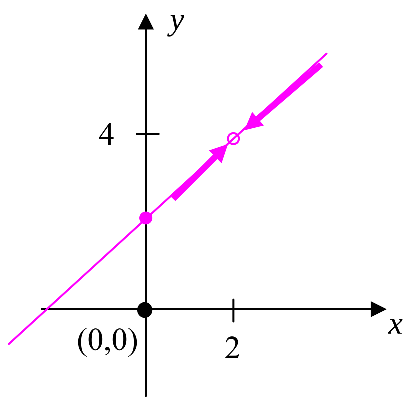
$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2} = YOK!$$

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = L \ \text{ ve } \lim_{x\to c^+} f(x) = L}$$

Limit **Sol limit** **Sağ limit**

Örnek. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = ?$

$x \neq 2$ için $\displaystyle \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2.$



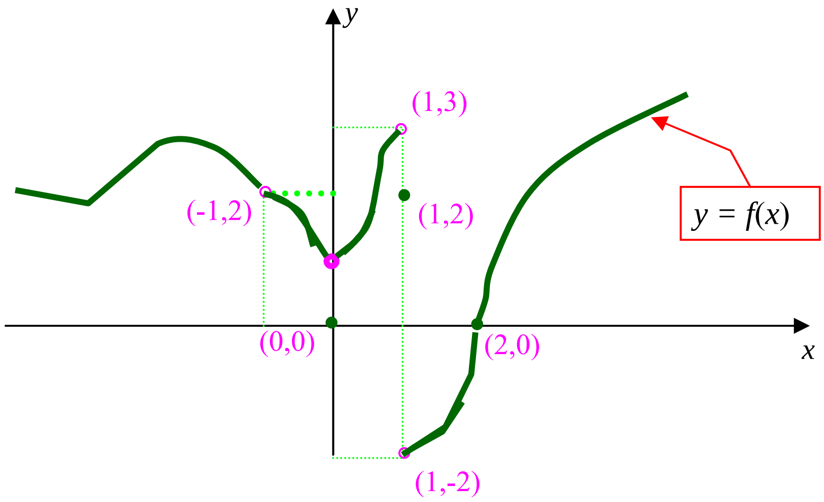
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Örnek. Öyle bir grafik ($y = f(x)$) çiziniz ki,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2\,,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3\,,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2\,,\ \lim_{x\to 0} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0\,,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0\,,\ f(0) = 0\,,\ f(1) = 2\,,\ f(2) = 0$$

olsun.



5.2. Limit ile ilgili bazı özellikler. f ve g fonksiyonlar; $c\,,L\,,M \in \mathbb{R}$;

$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad , \quad \lim_{x\to c} g(x) = M$ olsun. Bu takdirde

- $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$
- $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$
- $\lim_{x\to c}(kf(x)) = kL$
- $\lim_{x\to c} k = k$
- $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = LM$
- $\lim_{x\to c}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M} \qquad (M \neq 0)$
- $\lim_{x\to c}\left(\sqrt[n]{f(x)}\right) = \sqrt[n]{L} \qquad (n$ çiftse $\ L \geq 0)$

Örnek. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4x)=\lim\limits_{x\to 3}(x\cdot(x-4)) \; = \lim\limits_{x\to 3}(x)\cdot\lim\limits_{x\to 3}(x-4)$

$$= \lim\limits_{x\to 3}(x)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 4\right) \; = 3\cdot(3-4) = -3$$

ya da

$$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2)-\lim\limits_{x\to 3}(4x) = \left(\lim\limits_{x\to 3} x\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 3} x\right)-4\lim\limits_{x\to 3}(x)$$
$$= 3\cdot 3 - 4\cdot 3 = -3.$$

Not. f bir polinom fonksiyon,

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$$

İse,

$$\lim\limits_{x\to c} f(x) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1 c + a_0 = f(c)$$

olur.

Örnek. $\lim\limits_{x\to(-1)}(2x^2+3)=2(-1)^2+3=5.$

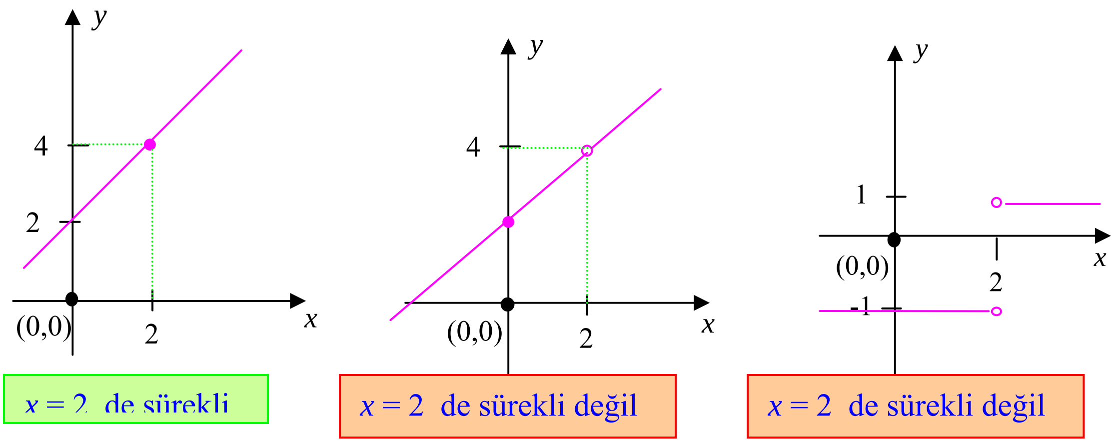
Örnek. $\lim\limits_{x\to(-1)}\sqrt{2x^2+3} = \sqrt{\lim\limits_{x\to(-1)}(2x^2+3)} \; = \sqrt{2(-1)^2+3}=\sqrt{5}.$

Bir rasyonel Fonksiyonun Limiti.

$$\lim\limits_{x\to c}\frac{n(x)}{d(x)}=\frac{n(c)}{d(c)} \quad , \quad (d(c)\neq 0).$$

Örnek. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x+4}{x+3}=\dfrac{(-1)^3-2(-1)+4}{(-1)+3}=\dfrac{5}{2}.$

5.3. Süreklilik. Aşağıdaki fonksiyonlardan her birinin $x = 2$ civarında grafiğini gözden geçirelim:

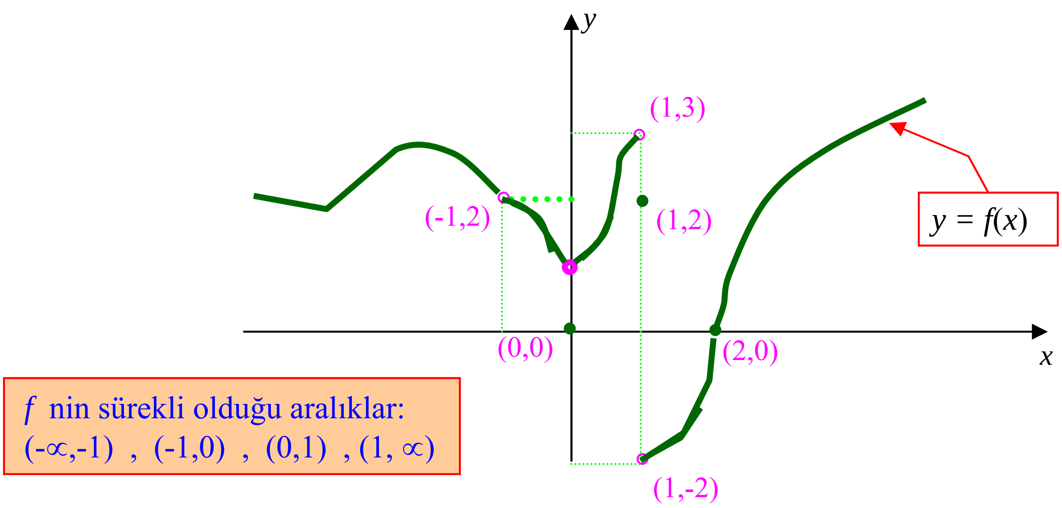


Tanım. **Eğer** aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa, f fonksiyonu $x = c$ de **sürekli**dir denir:

$$1)\ \lim_{x \to c} f(x) \text{ var} \quad , \quad 2)\ f(c) \text{ var} \quad , \quad 3)\ \lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

$x = c$ de sürekli olmayan bir fonksiyona $x = c$ de süreksiz fonksiyon denir.

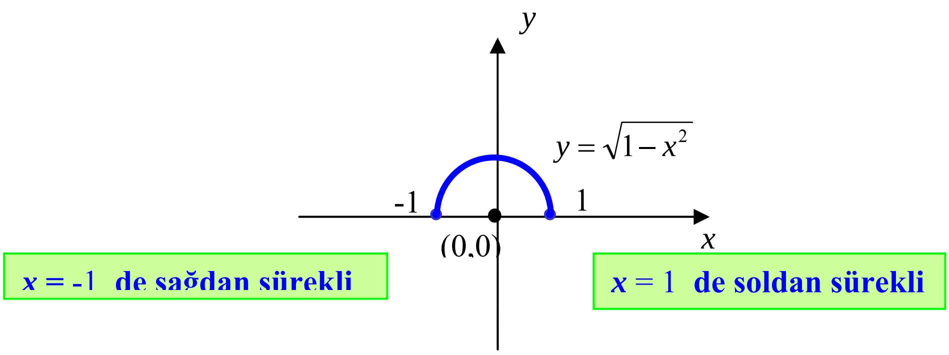
Tanım. a , $b \in \mathrm{R}$, $a < b$ olsun. Eğer $a < c < b$ olan her c için f fonksiyonu $x = c$ de sürekli ise, f fonksiyonu (a , b) aralığında süreklidir denir.

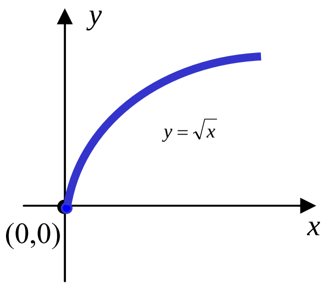


Tanım. Eğer $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ ise, $\boldsymbol{f}$ fonksiyonu $x = c$ de **soldan sürekli**dir denir.

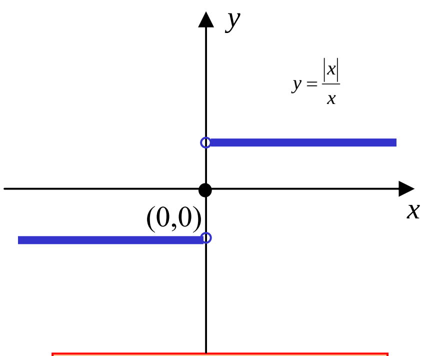
Tanım. Eğer $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ ise, $\boldsymbol{f}$ fonksiyonu $x = c$ de **sağdan sürekli**dir denir.

Örnekler.





$x = 0$ da sağdan sürekli

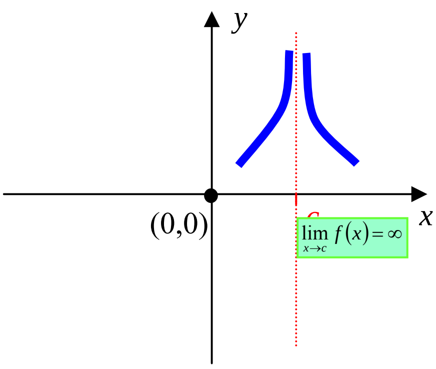


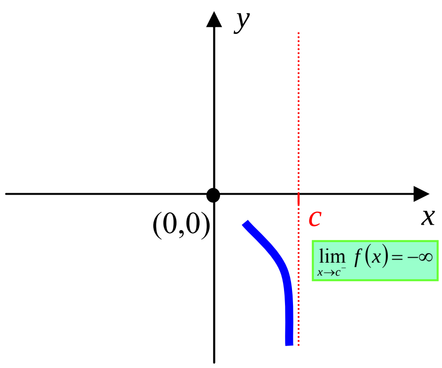
$x = 0$ da ne sağdan ne de soldan sürekli

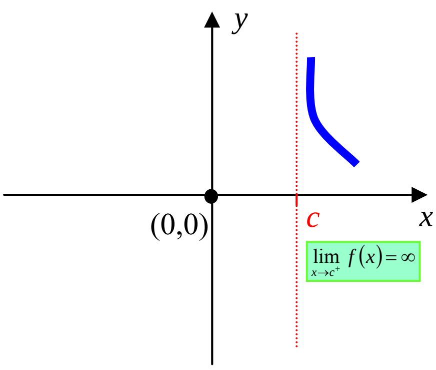
5.4. Süreklilik özellikleri.

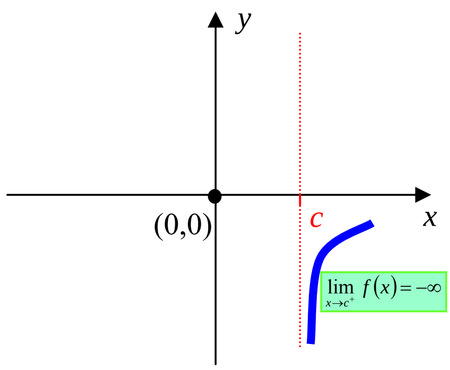
Fonksiyon		Sürekli olduğu bölge
$f(x) = c$	(sabit fonksiyon):	$\mathbf{R} = (-\propto , \propto)$
$f(x) = x^n$	(kuvvet fonksiyonu):	$\mathbf{R} = (-\propto , \propto)$
$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$	(polinom fonk.):	$\mathbf{R} = (-\propto , \propto)$
$f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$	(rasyonel fonksiyon):	$\mathbf{R} \backslash \{x : d(x) = 0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$,	n tek :	$\{a : u$, $x = a$ da sürekli$\}$
$f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$,	n çift :	$\{a : u(a) \geq 0$ ve u , $x = a$ da sürekli$\}$

Sonsuz Limitler.



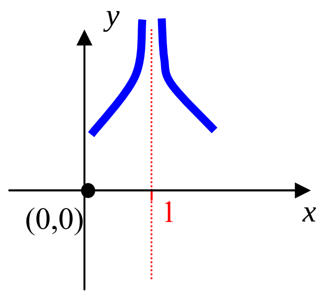






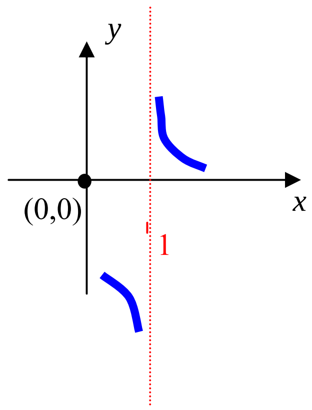
Örnekler.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$



$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$



Şaka. After explaining to a student, with various lessons and examples, that

$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{1}{x-8}\right) = \infty,$$

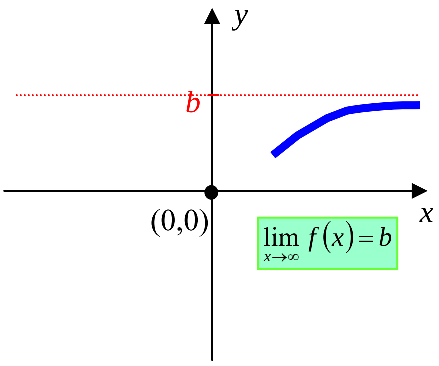
The teacher tried to check if she really understood that. So, the teacher gave her a different example:

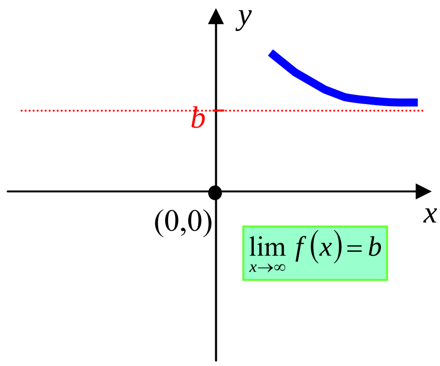
$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}\right) = ?$$

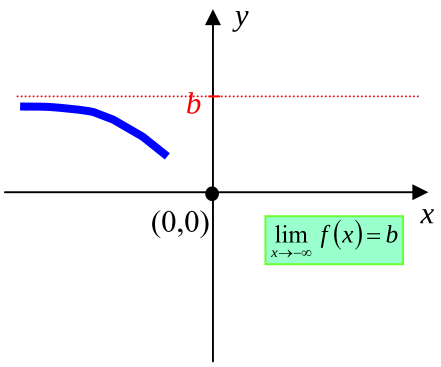
This was the result:

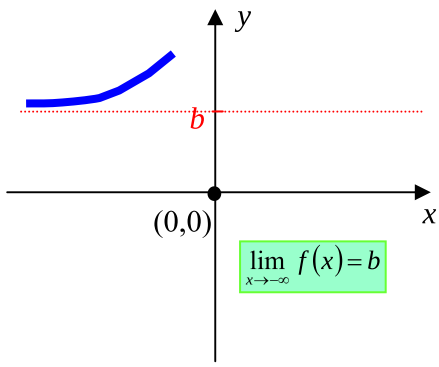
$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}\right) =$$ 

Sonsuzda Limitler.









Örnekler.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}=2$$

Yatay ve Düşey Asimtotlar.

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty \quad \Rightarrow \quad x = c$ **düşey asimtot**

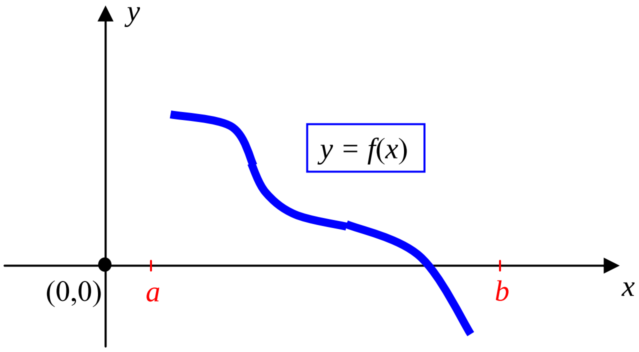
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b \quad \Rightarrow \quad y = b$ **yatay asimtot**

Örnek. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ in düşey ve yatay asimtotları:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=\infty$ olduğundan, $x=1$ düşey asimtot.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ ve $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ olduğundan, $y=2$ yatay asimtot.

Teorem. f fonksiyonu $(a\,,\,b)$ aralığında sürekli ve her $x \in (a\,,\,b)$ için $f\,(x) \neq 0$ ise, ya her $x \in (a\,,\,b)$ için $f(x) > 0$ dır; ya da her $x \in (a\,,\,b)$ için $f\,(x) < 0$ dır.



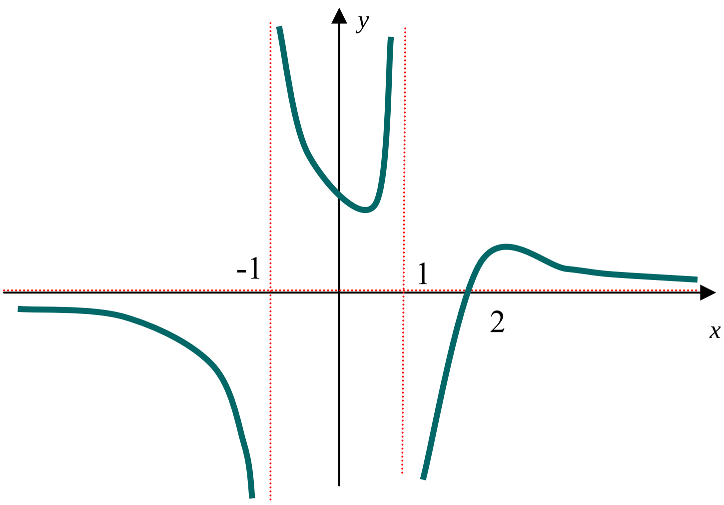
Tanım. f nin süreksiz olduğu x sayıları ile $f\,(x) = 0$ olan x sayılarına f nin parçalanış sayıları (partition numbers) veya işaret sayıları denir.

İşaret sayıları ve yukarıdaki teorem yardımıyla, hangi x sayıları için $f(x) > 0$ ve hangi x sayıları için $f\,(x) < 0$ olduğu kolayca belirlenir.

Örnek. $f\,(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$ denklemi ile verilen fonksiyonun işaret sayıları $x = -1$, 1 ve 2 dir. $f\,(x) > 0$ ve $f\,(x) < 0$ olan bölgeler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

x	(-1) 0 1 2
$x+1$	- - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + + + + +
$x-1$	- 0 + + + + + + + +
$x-2$	- 0 + + +
$\dfrac{x-2}{x^2-1}$	- - - - - - - - -	+ + + + + +	- - - - - - - - - -	+ + +

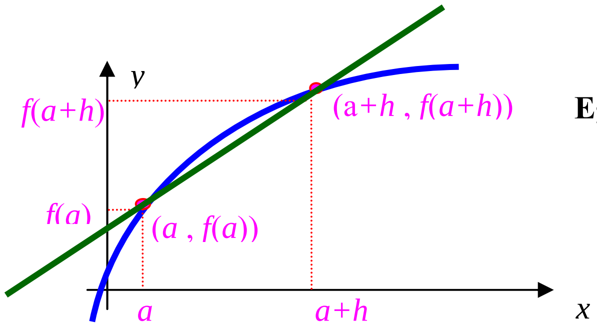
Bu fonksiyonun grafiği aşağıda gösterilmiştir.



5.5. Türev. $y = f(x)$ denklemi ile verilen f fonksiyonu ve bir a sayısı düşünelim. f nin $x = a$ civarındaki değişim oranını

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

olarak tanımladığımızı anımsayalım.Aşağıdaki şekle bakarak bu oranı yorumla-mağa çalışalım.



$$\text{Eğim: } \boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

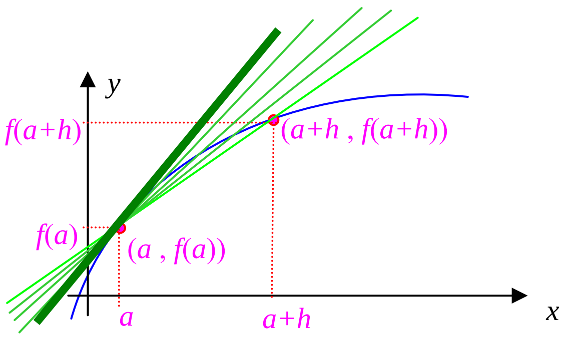
Yukarıdaki oran, $f(x)$ in $x = a$ dan $x = a+h$ ye kadar ortalama değişim oranı (average rate of change) dır. Bu oran, aynı zamanda, $(a , f(a))$ ve $(a+h , f(a+h))$ noktalarını birleştiren doğrunun eğimidir.

Aynı şekil üzerinde gözlemlerimizi sürdürelim.

h sıfıra yaklaşırken, yeşil doğru değişerek teğet durumuna gelir.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ile tanımlanan $f'(a)$ değerine(limit varsa) f fonksiyonunun $x = a$ daki türevi (derivative of f at $x = a$) denir.



$f'(a)$ değeri f fonksiyonunun $x = a$ daki anlık değişim oranını (instantaneous rate of change) verir.

Böylece görülür ki $f'(a)$ değeri $y = f(x)$ in grafiğinin $(a,f(a))$ noktasındaki teğetinin eğimidir. Böylece, $y = f(x)$ in grafiğinin $(a,f(a))$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

olur.

Örnek. $f(x) = x^2 + 2$, $f'(1) = ?$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left((1+h)^2+2\right)-(1^2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2$$

Böylece, $y = x^2 + 2$ nin grafiğinin $(1,f(1)) = (1,3)$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$y = 2(x-1)+3 \quad \Rightarrow \quad y = 2x+1$$

olur.

Her hangi bir f fonksiyonu için

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ile tanımlanan f' fonksiyonuna f fonksiyonunun **türev**i denir. Örneğimizde

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2+2\right)-(x^2+2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x.$$

Örnek. $f(x) = |x+2|$, $f'(1) = ?$, $f'(-2) = ?$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|1+h+2|-|1+2|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|-2+h+2|-|-2+2|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \quad \text{YOK!}$$

Örnek. $f(x) = c$, $f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Örnek. $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(1) = ?$, $f'(2) = ?$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}}{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+\sqrt{1})} = \frac{1}{2}.$$

Örnek. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(1)=?$, $f'(x)=?$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-(1+h))}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h}=-1.$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h))}{h\,x(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}.$$

Örnek. $f(x)=x^3$, $f'(x)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\left((x+h)^2+(x+h)x+x^2\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left((x+h)^2+(x+h)x+x^2\right)}{h}=3x^2.$$

Bir f fonksiyonu için f nin x teki türevi

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

varsa f fonksiyonu x te **türevlenebilir** (differentiable) denir.

f fonksiyonunun türevini hesaplama işlemine **türev alma** (differentiation) denir.

f fonksiyonunun türevini hesaplama eylemine **türev almak** (to differentiate) denir.

Problemler 5

1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$ ve $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=9$ ise, aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)-g(x))$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)+2g(x))$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{f(x)g(x)}$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 5}(3x^2+25)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{2x+5}{3x-5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}(x+2)^2(2x-4)$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

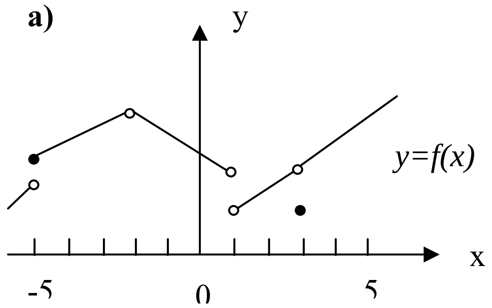
a) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{2x-5}{3x^2+5}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x-3}{x^2-9}\right)$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

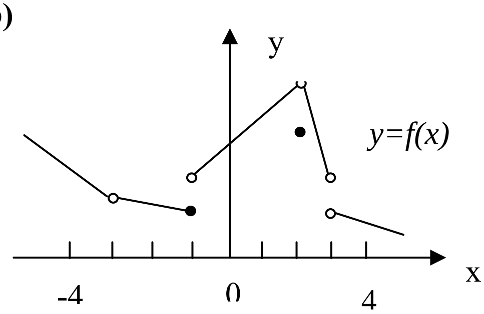
a) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-3}{|x-3|}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-x}{|1-x|}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}$

5. Aşağıda grafikleri verilmiş fonksiyonların süreksiz olduğu noktaları belirleyiniz.

a)



b)



6. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to \infty}(4x^2+2x-9)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty}(-3x^6+9x^5+4)$ **c)** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x+7}{5x-9}$

7. Aşağıdaki fonksiyonların düşey asimptotlarını bulunuz; $x = a$ düşey asimtot ise, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ sonsuz limitlerini belirleyiniz.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ **c)** $f(x)=\dfrac{8x-16}{x^4-8x^3+16x^2}$

8. Aşağıdaki fonksiyonların düşey ve yatay asimtotlarını bulunuz.

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x+3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$

9. Aşağıdaki problemlerde, belirtilen iki adımlı işlemi gerçekleştirerek $f'(x)$ i hesaplayınız.

1. adım: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ın sadeleştirilmesi
2. adım: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ değerinin bulunması

a) $f(x)=5$ **b)** $f(x)=2-x^2$ **c)** $f(x)=\sqrt{x}-3$

10. Aşağıdaki fonksiyonlar için $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ limitini hesaplayınız.

a) $f(x)=3x-4$ **b)** $f(x)=4x^2-5x+1$ **c)** $f(x)=x^3$ **d)** $f(x)=\sqrt{x}$

11. Plastik kutu üreten bir şirketin günde x adet kutu üretmesi durumunda toplam geliri $R(x)=60x-0.025x^2,\quad 0\le x\le 2400$ olarak veriliyor. Para birimi YTL dir.

a) Üretilen kutu sayısı 800 den 1000 e yükseldiğinde gelirdeki değişim nedir?
b) Üretilen kutu sayısının bu değişimi için gelirdeki ortalama değişim oranı nedir?

12. $f(x)=3x^2$ fonksiyonu için aşağıdaki değerleri bulunuz.

a) x , 1 den 4 e kadar değiştiğinde $y=f(x)$ deki değişim,
b) x , 1 den 4 e kadar değiştiğinde f(x) in ortalama değişim oranı,
c) $y=f(x)$ in grafiğinin (1,f(1)) ve (4, f(4)) noktalarından geçen kirişin eğimi,
d) x=2 değeri için f(x) in anlık değişim oranı,
e) $y=f(x)$ in grafiğinin (1,f(1)) noktasındaki eğimi.

13. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için x=2 deki teğet doğrusunun denklemini yazınız.

a) $f(x)=5x-1$ **b)** $f(x)=x^2-2$ **c)** $f(x)=\sqrt{x}+1$ **d)** $f(x)=2+|x-2|$

14. $f(x)=x^2-4x$ fonksiyonu için

a) $f'(x)$ i bulunuz.
b) f nin grafiğine x=0 , x=2 ve x=4 noktalarının her birinde teğet olan doğrunun eğimini bulunuz ve her üç durumda da teğet doğrusunun denklemini yazınız.
c) f nin grafiğini ve bu noktalardaki teğet doğrularını çiziniz.