

Elemanları iyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesnelere topluluğuna **küme** denir.

Kişiden kişiye değişebilecek, "bazı", "güzel" gibi ifadelerle küme belirtilemez.

Örnek :

"Asal rakamlar" ifadesi bir küme belirtir.

"Bazı günler" ifadesi bir küme belirtmez.

Kümeler, A, B, C gibi büyük harflerle gösterilir.

Küme oluşturulan her bir nesneye eleman denir.

$s(A) \Rightarrow A$ kümesinin eleman sayısı demektir.

$x \in A \Rightarrow x$, A kümesinin elemanıdır.

$x \notin A \Rightarrow x$, A kümesinin elemanı değildir.

Kümelerin Gösterimi

1 - Liste Yöntemi

Kümelerin elemanları $\{ \}$ parantezinin içinde virgülle ayrılarak yazılmasına **liste yöntemi** ile gösterim denir.

Örnek : $A = \{x, y, z, t\}$

Kümedeki elemanların yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez. $\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 1\}$ dir.

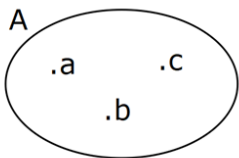
Kümedeki her eleman bir kere yazılır. ~~$\{1, 1, 2\}$~~

2 - Venn Şeması ile Gösterim :

Kümenin elemanlarını kapalı bir eğri içinde, her elemanın önüne nokta koyarak da gösterebiliriz.

Bu yöntemde kapalı şekil daire, dikdörtgen, elips gibi şekiller olabilir.

Örnek :



3 - Ortak özellik yöntemi :

Elemanların ortak özelliklerinden yararlanarak da kümeyi ifade edebiliriz.

$\{x \mid x \text{'lerin ortak özelliği}\}$

Örnek : $\{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$ "x öyle ki 5 ten küçük doğal sayılardır." şeklinde okunur.

Elemanları $\Rightarrow 0, 1, 2, 3$ ve 4 tür.

"|" sembolü yerine ":" iki nokta da kullanılabilir.

Eleman sayıları bir doğal sayı ile ifade edilebilen kümelere **sonlu küme**, edilemeyenlere ise **sonsuz küme** denir.

Örnek :

$A = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$ sonlu küme

$B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$ sonsuz küme

Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir.

\emptyset veya $\{ \}$ sembolleriyle gösterilir.

Üzerinde işlem yapılan tüm kümelerden ait elemanları kapsayan kümeye **evrensel küme** denir. Genellikle E harfi ile gösterilir.

ALT KÜME

A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A, B'nin bir alt kümesidir.

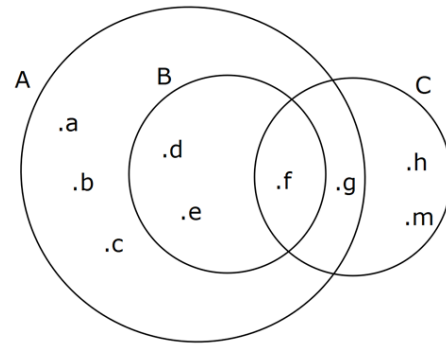
$A \subset B$ veya $A \subseteq B$ diye gösterilir.

Biz bunu, B kümesi A kümesini kapsar diye de ifade edebiliriz.

$B \supset A$ veya $B \supseteq A$ diye gösterilir.

A kümesinin en az bir elemanı, B'nin bir elemanı değilse A, B'nin bir alt kümesi olamaz.

Bu durum da $A \not\subset B$ diye gösterilir.



$B \subset A$ dır. (B, A'nın bir alt kümesidir.)

$C \not\subset A$ dır. (C, A'nın bir alt kümesi değildir.)

$A \supset B$ dir. (A, B yi kapsar.)

Not :

Boş küme, her kümenin bir alt kümesidir. $\emptyset \subset A$

Her küme, kendisinin bir alt kümesidir. $A \subset A$

$A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.

Her küme evrensel kümenin bir alt kümesidir.

E: evrensel küme olsun. $A \subset E, B \subset E$ dir.

Sayı kümeleri arasında da alt küme ilişkisi vardır.



Alt Küme Sayısı

$s(A) = n$ ise alt küme sayısı $= 2^n$ dir.

Örnek : 5 elemanlı bir kümenin $2^5 = 32$ farklı alt kümesi vardır.

Kümenin kendisi hariç, alt küme sayısına **özalt küme sayısı** denir ve $2^n - 1$ şeklinde hesaplanır.

Örnek : 6 elemanlı bir kümenin özalt küme sayısı $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ tür.

Not :

Tüm elemanları aynı olan kümelere **eşit kümeler** denir. $A = B$ şeklinde gösterilir.

$A = B$ ise $A \subset B$ ve $B \subset A$ dir.

Eleman sayıları eşit olan kümelere ise **denk kümeler** denir.

$A = \{x \mid x \text{ çift rakam}\}$

$B = \{x \mid x \text{ asal sayı, } x < 10\}$

kümeleri veriliyor. $A \cup B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

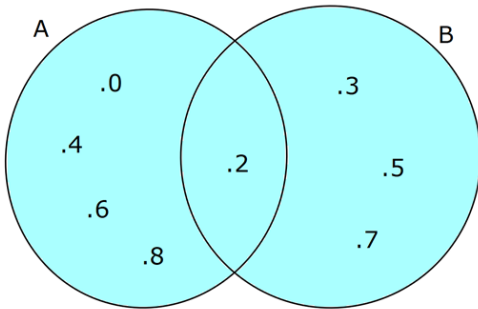
- A) $A \cup B = \{x \mid x \text{ rakam}\}$
- B) $A \cup B = \{x \mid 1 < x < 9, x \in \mathbb{N}\}$
- C) $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- D) $A \cup B = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- E) $A \cup B = \{2\}$

Kümelerin Birleşimi

A ve B iki küme olsun. A ile B nin tüm elemanlarından oluşan kümeye A ve B'nin birleşim kümesi denir. $A \cup B$ diye gösterilir.

Sembolik mantıkta **veya** (\vee) ile ifade edilir.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$ dir.



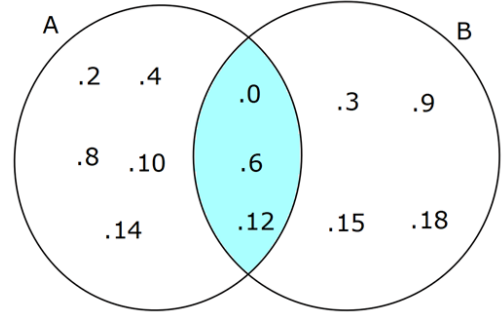
$A \cup B = \text{Taralı Bölge}$

Kümelerin Kesişimi

A ve B iki küme olsun. A ile B nin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B'nin kesişim kümesi denir. $A \cap B$ diye gösterilir.

Sembolik mantıkta **ve** (\wedge) ile ifade edilir.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$ dir.



$A \cap B = \text{Taralı Bölge}$

Özellikler

Tek Kuvvet Özelliği $\begin{cases} A \cup A = A \text{ dir.} \\ A \cap A = A \text{ dir.} \end{cases}$

Boş Kümenin Etkisi $\begin{cases} A \cup \emptyset = A \text{ dir.} \\ A \cap \emptyset = \emptyset \text{ dir.} \end{cases}$

Değişme Özelliği $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \text{ dir.} \\ A \cap B = B \cap A \text{ dir.} \end{cases}$

Birleşme Özelliği $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \text{ dir.} \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \text{ dir.} \end{cases}$

Sonuç Boş Küme ise

$A \cup B = \emptyset$ ise $A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ dir.

$A \cap B = \emptyset$ ise A ve B ayrık kümelere dir.

Alt kümesi ise ($B \subset A$ ise) $\begin{cases} A \cup B = A \text{ dir.} \\ A \cap B = B \text{ dir.} \end{cases}$

E evrensel küme ise $\begin{cases} A \cup E = E \text{ dir.} \\ A \cap E = A \text{ dir.} \end{cases}$

Dağılma Özelliği

Birleşim işleminin, kesişim işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dir.

Aynı şekilde; Kesişim işleminin de, birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.

Birleşim kümesinin eleman sayısı

A ve B iki küme olsun.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ dir.}$$

Eğer ayrık küme iseler, $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.

Çünkü ayrık kümelerin kesişimleri boş kümedir.

Örnek: $s(A) = 5$, $s(B) = 6$, $s(A \cap B) = 2$ ise

$$\begin{aligned} s(A \cup B) &= 5 + 6 - 2 \\ &= 9 \text{ dur.} \end{aligned}$$

Not: 3 kümenin birleşimin eleman sayısını bulma

A, B ve C kümeleri olsun.

$$\begin{aligned} s(A \cup B \cup C) &= s(A) + s(B) + s(C) \\ &\quad - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) \\ &\quad + s(A \cap B \cap C) \text{ dir.} \end{aligned}$$

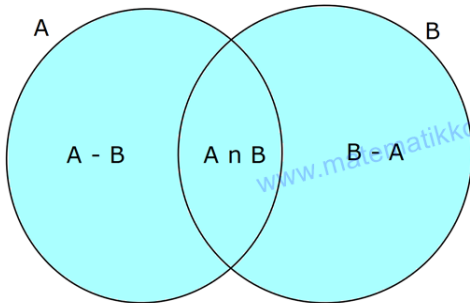
Kümelerde Fark

A ve B iki küme olsun.

A'da olup da B'de olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A fark B kümesi** denir. $A - B$ veya $A \setminus B$ diye gösterilir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ olsun.

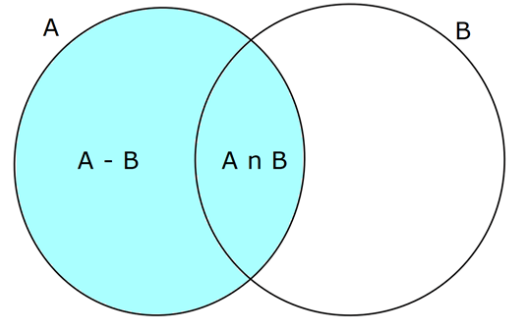
$$A - B = \{2, 4\} \text{ tür.}$$



$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) + (B - A) \text{ dir.}$$

Bu sebeple

$$s(A \cup B) = s(A - B) + s(A \cap B) + s(B - A) \text{ dir.}$$



Ayrıca bir kümeyi

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$ olarak da düşünebiliriz.

$$s(A) = s(A - B) + s(A \cap B) \text{ dir.}$$

Özellikler

A ve B iki küme olsun.

$$A - A = \emptyset \text{ dir.}$$

$$A - \emptyset = A \text{ dir.}$$

$$\emptyset - A = \emptyset \text{ dir.}$$

$$A - E = \emptyset \text{ dir.}$$

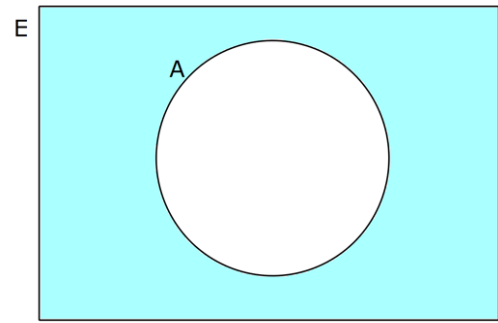
$$A \subset B \text{ ise } A - B = \emptyset \text{ dir.}$$

A ve B ayrık kümeler ise $A - B = A$ dir.

Kümenin Tümleyeni

E evrensel küme ve A kümesi E nin bir alt kümesi olsun.

A kümesinde olmayıp, E de olan tüm elemanlara A kümesinin tümleyeni denir ve A' olarak gösterilir.



Tarlalı Bölge = A'

Örnek: $E = \{x \mid x \text{ bir rakam}\}$ ve $A = \{x \mid x \text{ bir asal rakam}\}$ olsun. $A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ dur.

Not:

Bir küme ile tümleyeninin birleşimi evrensel kümeyi verir. Dolayısıyla eleman sayıları toplamı, evrensel kümenin eleman sayısıdır.

$$s(A) + s(A') = s(E) \text{ dir.}$$

Özellikler

$$(A')' = A \text{ dir.}$$

$$E' = \emptyset$$

$$\emptyset' = E$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = E$$

$$E - A = A'$$

$A \subset B$ ise $B' \subset A'$ dir.

Not: $(A - B) = A \cap B'$ eşittir.

De Morgan Kuralı

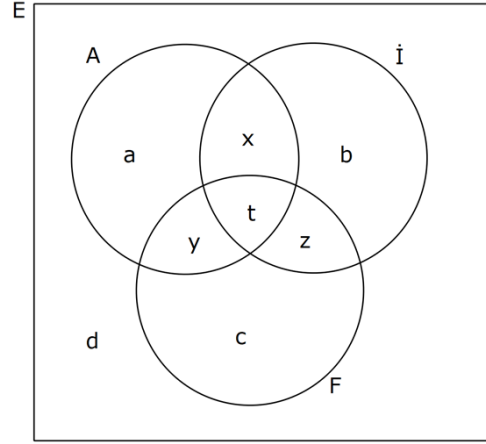
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Not: Küme sembolleriyle, sembolik mantık gösterimleri arasında benzerlik vardır.

Kümeler	Sembolik Mantık
\emptyset	0
E	1
\cup	\vee
\cap	\wedge
Tümleyen (')	Değili (')
=	\equiv

KÜME PROBLEMLERİ



A: Almanca bilenler

İ: İngilizce bilenler

F: Fransızca bilenler olmak üzere

Almanca bilenler = $a + x + y + t$ dir.

Almanca ve Fransızca bilenler = $y + t$ dir.

İngilizce veya Fransızca bilenler = $b + c + x + y + z + t$

Yalnız bir dil bilenler = $a + b + c$

En az bir dil bilenler = $a + b + c + x + y + z + t$

En çok bir dil bilenler = $a + b + c + d$

Sadece iki dil bilenler = $x + y + z$

En az iki dil bilenler = $x + y + z + t$

En çok iki dil bilenler = $d + a + b + c + x + y + z$

Üç dili de bilenler = t

Hiç bir dil bilmeyenler = d dir.

İngilizce bilmeyenler = $a + c + d + y$ dir.