n, 1' den büyük bir tam sayı olmak üzere $\sqrt[n]{a}$ ifadesine a sayısının n.dereceden kökü denir.

$n=2$ olursa, 2 yazılmadan $\sqrt{a}$ şeklinde gösterilebilir (Karekök a).

$n=3$ olursa $\sqrt[3]{a}$ şeklinde gösterilir (Küpkök a).

$\sqrt[n]{a}$ ifadesi aslında $x^n=a$ denkleminin köküdür.

Örnek:

$\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$ tür.

$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$ dir.

$\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1^4}=1$ dir.

$x^5=32$ ise $x=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$ dir.

$x^3=-27$ ise $x=\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$ tür.

Not: $\sqrt[n]{a} \Rightarrow$ n çift ise $a \geq 0$ olmak zorundadır.
n tek olursa, a tüm reel sayı değerlerini alabilir.

Örnek:

$\sqrt{2x-3}+\sqrt[5]{12-2x}+\sqrt[6]{5-x}$ ifadesi bir gerçek sayı olduğuna göre, x kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

Çözüm:

$\underbrace{\sqrt{2x-3}}_{\text{içerisi negatif olamaz.}}+\underbrace{\sqrt[5]{12-2x}}_{\text{Derece tek, içerisi her reel sayı olabilir.}}+\underbrace{\sqrt[6]{5-x}}_{\text{içerisi negatif olamaz.}}$

$2x-3\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 3 \Rightarrow x\geq 1{,}5$ tir.

$5-x\geq 0 \Rightarrow 5\geq x$ tir. O halde,

$x=2,3,4,5$ olabilir. $\Rightarrow$ 4 tamsayı değeri

Not: n tek ise $\sqrt[n]{x^n}=x$ tir.

n çift ise $\sqrt[n]{x^n}=|x|$ tir (Negatif çıkamaz).

Örnek:

$\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-5)^4}=?$

Çözüm:

$|-2|+(-3)+|-5|=2-3+5=4$ tür.

Örnek:

$\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}-\sqrt[4]{\left(\sqrt{10}-2\right)^4}=?$

Çözüm:

$\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}-\sqrt[4]{\left(\sqrt{10}-2\right)^4}=?$

$\underbrace{\left|3-\sqrt{10}\right|}_{\text{içerisi negatiftir. Ters çıkarlar.}}+\underbrace{\left|\sqrt{10}-2\right|}_{\text{içerisi pozitiftir. Aynı çıkarlar}}$

$\sqrt{10}-3-\left(\sqrt{10}-2\right)$

$\cancel{\sqrt{10}}-3-\cancel{\sqrt{10}}+2$

$=-1$ dir.

Kareköklü Sayının Yaklaşık Değerini Hesaplama

İlk önce hangi ardışık tamsayılar arasında olduğu bulunur. Sonra bunların kareleri arasındaki mesafelere bakılarak, ne kadar ekleme ya da çıkarma yapılacağına karar verilir.

Örnek:

$\sqrt{38}$ sayısı $\underbrace{\sqrt{36}}_{6}$ ile $\underbrace{\sqrt{49}}_{7}$ arasındadır.

$\underbrace{\overbrace{36 \quad 38}^{2\text{ br}}\overbrace{\quad 49}^{11\text{ br}}}_{13\text{ br}}$

38 sayısı 36'ya daha yakın olduğu için 6'ya $\frac{2}{13}$ ekleriz. O halde, $\sqrt{38}$ in yaklaşık değeri $6\frac{2}{13}$ tür.

Örnek:

$\sqrt{32}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm:

$\underset{5}{\sqrt{25}}<\sqrt{32}<\underset{6}{\sqrt{36}}$

$\underbrace{\overbrace{25 \quad 32}^{7\text{ br}}\overbrace{\quad 36}^{4\text{ br}}}_{11\text{ br}}$

32 sayısı 36'ya daha yakın olduğu için 6'dan $\frac{4}{11}$ çıkarırız. $\Rightarrow$ O halde, $\sqrt{32}$ nın yaklaşık değeri $6-\frac{4}{11}$ dir.

Köklü İfadeyi Üslü İfade Olarak Yazma

$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ dir.

Örnek:

$\sqrt[4]{5^7}=5^{\frac{7}{4}}$ tür.

$\sqrt[3]{3^6}=3^{\frac{6}{3}}=3^2=9$ dur.

$\sqrt{4^3}=4^{\frac{3}{2}}=\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$ dir.

Örnek:

$\sqrt[5]{\frac{1}{125}}$'i üslü olarak yazınız.

Çözüm:

$\sqrt[5]{\frac{1}{125}}=\sqrt[5]{\frac{1}{5^3}}=\sqrt[5]{5^{-3}}=5^{-\frac{3}{5}}$ tir.

Örnek:

$5^{\frac{2}{3}}$ 'ü köklü olarak yazınız.

Çözüm:

$5^{\frac{2\,\rightarrow\,\text{Kök içerisindeki 5'in üssü}}{3\,\rightarrow\,\text{Kökün derecesi}}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$ tir.

Kökün İçerisinden Dışarıya Sayı Çıkarma

$\sqrt[n]{a^n.b}=a\sqrt[n]{b}$ olarak yazılabilir.

Örnek: $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{2^3.2}=2\sqrt[3]{2}$ dir.

$a\sqrt[n]{b}$ ifadesi de $\sqrt[n]{a^n.b}$ olarak yazılabilir.

Örnek: $3\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{3^3.4}=\sqrt[3]{27.4}=\sqrt[3]{108}$ dir.

Örnek:

$x=2\sqrt{5},\ y=3\sqrt{4},\ z=4\sqrt{3}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm:

$x=2\sqrt{5}=\sqrt{2^2.5}=\sqrt{4.5}=\sqrt{20}$ dir.

$y=3\sqrt{4}=\sqrt{9.4}=\sqrt{36}$ dır.

$z=4\sqrt{3}=\sqrt{16.3}=\sqrt{48}$ dir.

Buna göre, $x<y<z$ dir.

Kökün Derecesini Genişletme veya Sadeleştirme

Kökün derecesi ile içindeki sayının üssü aynı pozitif sayı ile çarpılabilir veya bölünebilir.

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n.c]{a^{m.c}}=\sqrt[\frac{n}{c}]{a^{\frac{m}{c}}}$ olarak yazılabilir.

Örnek:

$x=\sqrt[3]{4},\ y=\sqrt[4]{8},\ z=\sqrt[6]{16}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm:

Köklerin dereceleri 12 olacak şekilde genişletebiliriz.

$x=\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3.4]{2^{2.4}}=\sqrt[12]{2^8}$ dir.

$y=\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4.3]{2^{3.3}}=\sqrt[12]{2^9}$ dur.

$z=\sqrt[6]{16}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[6.2]{2^{4.2}}=\sqrt[12]{2^8}$ dir.

Buna göre, $x=z<y$ dir.

Köklü Sayılarda Toplama Çıkarma

Kök derecesi ve kökün içi aynı olan ifadelerin katsayıları toplanır veya çıkarılır.

Örnek:

$\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{72}=?$

Çözüm:

$\sqrt{16.2}-\sqrt{9.2}+\sqrt{36.2}$

$=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}+6\sqrt{2}$

$=(4-3+6)\sqrt{2}$

$=7\sqrt{2}$ dir.

Örnek:

$2\sqrt[3]{24x}-\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{81x}=18$ ise x kaçtır?

Çözüm:

$2\sqrt[3]{8.3x}-\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{27.3x}=18$

$2.2\sqrt[3]{3x}-\sqrt[3]{3x}+3\sqrt[3]{3x}=18$

$\left(4-1+3\right)\sqrt[3]{3x}=18$

$6\sqrt[3]{3x}=18$

$\sqrt[3]{3x}=3$

$3x=27$

$x=9$ dur.

Köklü Sayılarda Çarpma Bölme

Kök dereceleri aynı ise, aynı kök içerisinde çarpma veya bölme yapılabilir.

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$ dir.

Örnek: $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$ dir.

$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{9}=3$ tür.

Kök dereceleri farklı ise, En küçük ortak katta eşitlenecek şekilde kök dereceleri genişletilir.

Örnek: $\sqrt[3]{4}.\sqrt{2} = \sqrt[3.2]{4^2}.\sqrt[2.3]{2^3} = \sqrt[6]{4^2.2^3} = \sqrt[6]{2^4.2^3} = \sqrt[6]{2^7}$

$= \sqrt[6]{2^6.2} = 2\sqrt[6]{2}$ dir.

Örnek:

$$\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt[4]{36}} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt[4]{36}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[\overset{2}{\cancel{4}}]{6^{\cancel{2}}}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1 \text{ dir.}$$

Köklü Sayının Üssünü Alma

$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$ dir.

Örnek: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ tir.

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = \sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{6}\,2}} = 2^2 = 4$ tür.

İki kare Farkını Köklü Sayılarda Kullanma

$\left(a^n + b^n\right)\left(a^n - b^n\right) = a^{2n} - b^{2n}$ dir.

Örnek: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$

$= 2 - 3 = -1$ dir.

Örnek:

$x = \sqrt{3}+1$ ise $x(x-1)(x-2)$ kaçtır?

Çözüm:

$$x(x-1)(x-2) = \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$= \underbrace{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}_{\text{İki kare farkı}}.\sqrt{3}$$

$$= (3-1).\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

$\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{3+\sqrt{5}} = ?$

Çözüm:

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9-5}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2 \text{ dir.}$$

İç İçe Köklü İfadeler (Sonlu)

Örnek:

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$ tir.

Örnek: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[15]{2}$ dir.

$\sqrt[n]{x\sqrt[m]{y}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x^m y}} = \sqrt[n.m]{x^m y}$ dir.

Örnek: $\sqrt[3]{4\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{4^5.2}} = \sqrt[15]{4^5.2} = \sqrt[15]{2^{10}.2} = \sqrt[15]{2^{11}}$

Örnek:

$\sqrt{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = 2$ ise x kaçtır?

ÇÖZÜM:

$$\sqrt{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^2.x}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}} = \sqrt[2.3.2]{x^3} = \sqrt[\overset{4}{\cancel{12}}]{x^{\cancel{3}}} = \sqrt[4]{x}$$

$\sqrt[4]{x} = 2$ ise $x = 2^4 = 16$ dır.

Örnek:

$\sqrt[3]{61+\sqrt[4]{85-\sqrt{16}}} = ?$

Çözüm:

$$\sqrt[3]{61+\sqrt[4]{85-\sqrt{16}}} = \sqrt[3]{61+\sqrt[4]{85-4}}$$

$$= \sqrt[3]{61+\sqrt[4]{81}}$$

$$= \sqrt[3]{61+\sqrt[4]{3^4}}$$

$$= \sqrt[3]{61+3}$$

$$= \sqrt[3]{64}$$

$$= \sqrt[3]{4^3}$$

$$= 4 \text{ tür.}$$

Köklü Sayıların Eşleniği

Çarpımları rasyonel olan iki gerçek sayıdan biri, diğerinin eşleniğidir.

- $\sqrt{a}$ nın eşleniği $\sqrt{a}$ dır. $\Rightarrow$ $\sqrt{a}.\sqrt{a} = a$ dır.

Örnek:

$\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ dir.

Örnek:

$$\underset{(\sqrt{6})}{\frac{12}{\sqrt{6}}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6} \text{ dır.}$$

- $\sqrt[n]{a^m}$ nin eşleniği $\sqrt[n]{a^{m-n}}$ dir.

Örnek :

$\sqrt[6]{5^2}$ nin eşleniği $\sqrt[6]{5^4}$ tir.

İkisinin çarpımı $\sqrt[6]{5^2}.\sqrt[6]{5^4}=\sqrt[6]{5^6}=5$ tir.

Örnek :

$$\frac{4}{\sqrt[3]{16}}=\frac{4}{\sqrt[3]{2^4}}=\frac{4}{\underset{\left(\sqrt[3]{2^2}\right)}{2\sqrt[3]{2}}}=\frac{\cancel{4}\sqrt[3]{2^2}}{\cancel{2.2}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4} \text{ tür.}$$

- $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ nin eşleniği $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ dir.

  $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ nin eşleniği de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ dir.

Örnek :

$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ün eşleniği $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ tür.

$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=5-3=2$ dir.

Örnek:

$$\frac{5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}=?$$

Çözüm:

$$\frac{5}{\underset{\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}}=\frac{5\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)}{10-5}=\frac{\cancel{5}\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{5}}=\sqrt{10}+\sqrt{5}$$

Örnek:

$$\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\frac{12\sqrt{3}}{4}=?$$

Çözüm:

$$\frac{6}{\underset{\left(\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\underset{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}+1}}-\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\sqrt{3}}{\cancel{4}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}-\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}-3\sqrt{3}$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}-3\sqrt{3}$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{4-2\sqrt{3}}{2}-3\sqrt{3}$$

$$=2\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)-3\sqrt{3}$$

$$=2\sqrt{3}-2+\sqrt{3}-3\sqrt{3}$$

$$=-2+\sqrt{3}\underbrace{(2+1-3)}_{0}$$

$$=-2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1}$ ise $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{12}+2}$ ifadesinin x cinsinden eşitini bulunuz.

Çözüm:

$\sqrt{12}+2=\sqrt{4.3}+2=2\sqrt{3}+2=2\left(\sqrt{3}+1\right)$ dir.

Dikkat edilirse, sorulan ifade ile verilen ifadelerde pay ve payda ters olacak şekilde eşlenikler verilmiş.

İstenen ifadeye y dersek, x ile $\dfrac{1}{y}$ nin çarpımı

$$x\cdot\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{2(3-1)}{2-1}$$

$$\frac{x}{y}=4 \Rightarrow x=4y \Rightarrow y=\frac{x}{4} \text{ tür.}$$

Tam Kare Köklü İfadeler

$\sqrt{(a+b)\mp2\sqrt{a.b}}=\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ dir. $\quad(a>b)$

Örnek :

$$\sqrt{\underset{2+3}{5}-2\sqrt{\underset{2.3}{6}}}=\sqrt{3}-\sqrt{2} \text{ dir.}$$

$$\sqrt{\underset{5+1}{6}+2\sqrt{\underset{5.1}{5}}}=\sqrt{5}+1 \text{ dir.}$$

Örnek:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}=?$$

Çözüm:

$$\sqrt{7+\sqrt{4.12}}=\sqrt{\underset{3+4}{7}+2\sqrt{\underset{3.4}{12}}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=?$$

Çözüm:

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{4\cdot\frac{5}{4}}}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt{\underset{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{3}+2\sqrt{\underset{\frac{5}{2}\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}}}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}\,\cancel{\left(\sqrt{5}+1\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{\left(\sqrt{5}+1\right)}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}.\sqrt{2}=2 \text{ dir.}$$