İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere

$ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki açık önermelere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde a, b, c reel sayılarına katsayılar; x e bilinmeyen denir.

Örnek:

$x^2 + x - 1 = 0$, $3x^2 + 4 = 0$, $4x^2 + x = 0$ denklemleri ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir.

Bu denklemlerde x^2 nin katsayısı sıfırdan farklı olduğuna dikkat ediniz.

Örnek:

$x^2 = 0$ denkleminde $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$ dır.

$-x^2 + 3 = 0$ denkleminde $a = -1,\ b = 0,\ c = 3$ tür.

$3x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminde $a = 3,\ b = -2,\ c = -4$ tür.

$-\frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$ denkleminde $a = -\frac{3}{2},\ b = 0,\ c = -1$ dir.

Örnek:

$(a-2)x^3 + x^{b-1} + 2x - 3 = 0$ ifadesi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre a + b toplamı kaçtır?

Çözüm:

$(a-2)x^3 + x^{b-1} + 2x - 3 = 0$ ifadesi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre,

$a - 2 = 0$ ve $b - 1 = 2$ olmalıdır.

O halde,

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ ve $b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3$ tür.

Buna göre, a + b = 2 + 3 = 5 bulunur.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde x bilinmeyeni yerine yazıldığında eşitliği sağlayan reel sayılara denklemin reel kökleri denir. Denklemin reel köklerinin oluşturduğu kümeye çözüm kümesi denir. Çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de denklemi çözme denir.

Çok sık kullanılan bazı denklem çözme yöntemleri şunlardır.

a) Çarpanlara Ayırma Yoluyla Denklem Çözme

İkinci dereceden denklemin çözüm kümesi, kolaylıkla görülebiliyorsa, çarpanlara ayrılarak bulunur. Bunun için, a ve b birer reel sayı olmak üzere $a.b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ olduğu göz önüne alınacaktır?

Örnek:

$x^2 - 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow (x-2).(x+2) = 0$ ise,

$x - 2 = 0$ veya $x + 2 = 0$

$x = 2$ veya $x = -2$ bulunur.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{-2, 2\}$ dir.

Örnek:

$x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 \Rightarrow (x-1).(x-1) = 0$ ise,

$x - 1 = 0$ veya $x - 1 = 0$

$x = 1$ veya $x = 1$ bulunur.

Buna göre verilen denklemin birbirine eşit iki kökü vardır. O halde çözüm kümesi,

$Ç = \{1\}$ dir.

Sonuç:

$(ax+b)^2 = 0$ denkleminin iki kökü vardır. Bu kökler birbirine eşittir. Bu tür denklemlere tam kare denir. Tam kare olan denklemlerin kökleri için, eşit iki kök , çakışık kök, çift katlı kök ifadelerinden biri kullanılır.

Buna göre son verdiğimiz örnekte $x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin eşit iki kökü vardır. Bu durumda denklemin kökleri çakışıktır (çift katlıdır).

Örnek:

$x^2 - 4x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x.(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ veya } x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = 4 \text{ tür.}$$

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{0,4\}$ tür.

Örnek:

$2x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow (2x+1).(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 0 \text{ veya } x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ veya } x = 1$$

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ dir.

b. Formül Kullanarak Denklem Çözme

Yukarıdaki örneklerde verilen denklemlerin sol tarafı kolayca çarpanlarına ayrılabilmektedir. $x^2 + x - 1 = 0$ denklemi gibi pek çok denklemin sol tarafı kolayca çarpanlarına ayrılmayabilir. Bu durumda ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin çözümü için genel bir yaklaşıma ihtiyaç vardır.

$ax^2 + bx + c = 0$ ve $a \neq 0$ olsun. Denklemin her tarafını a ile bölersek,

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ olur. Bu ifadeyi tam kareye tamamlamak için $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ifadesini bir ekleyip bir çıkaralım,

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

Bu son eşitliğin sağlanabilmesi için,

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \text{ veya } x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ veya } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ veya } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ olur.}$$

O halde, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \text{ dır.}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b^2 - 4ac$ ifadesine denklemin diskriminantı denir ve Δ ile gösterilir.

$\Delta = b^2 - 4ac$ dir.

Diskriminantın işaretine göre $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerini belirleyelim.

a. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise denklemin birbirinden farklı iki kökü vardır. Bu kökler,

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ dır. Bu durumda denklemin çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} \text{ dır.}$$

b. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise,

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{0}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{0}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$ olup

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ dır. Yani denklemin çakışık iki kökü vardır. Bu durumda denklemin çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} \text{ dır.}$$

c. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise negatif bir sayının karekökü reel sayı olmadığı için $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac}$ ifadesi reel sayı değildir. Denklemin reel sayı kökü yoktur. Denklemin reel sayılardaki çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek:

$x^2 - 3x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 3x + 2 = 0$ denkleminde $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$ dir

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.2 = 9 - 8 = 1 > 0$

olduğundan denklemin farklı iki kökü vardır.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) - \sqrt{1}}{2.1} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ ve

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) + \sqrt{1}}{2.1} = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 1$

$x_1 = 1$ ve $x_2 = 2$ olup denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{1, 2\}$ dir.

Örnek:

$9x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$9x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminde $a = 9$, $b = -6$, $c = 1$ dir

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.9.1 = 36 - 36 = 0$ olduğundan denklemin birbirine eşit olan (çakışık) iki kökü vardır.

$x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2.9} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$ olup denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{ \dfrac{1}{3} \right\}$ tür.

Örnek:

$3x^2 - x + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$3x^2 - x + 5 = 0$ denkleminde $a = 3$, $b = -1$, $c = 5$ tir

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.3.5 = 1 - 60 = -59 < 0$
olduğundan denklemin reel kökü yoktur. O halde denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \phi$ dir.

Örnek:

$x^2 + x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-1) = 1 + 5 = 5 > 0$ olduğundan denklemin farklı iki kökü vardır.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2.1} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ve

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2.1} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

olup denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{ \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$ dir.

Örnek:

$2x^2 + x + 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.2.9 = 1 - 72 = -71 < 0$ olduğundan denklemin reel kökü yoktur. O halde denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \phi$ dir.

Örnek:

$x^2 + (m + 5)x + m + 8 = 0$ denkleminin eşit (çakışık) iki reel kökü olduğuna göre m nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm:

İkinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin eşit (çakışık) iki kökünün olması için denklemin diskriminantı sıfır olmalıdır. Bu durumda verilen denklemde $\Delta = 0$ dır. Buna göre,

$\Delta = b^2 - 4ac = (m + 5)^2 - 4.1.(m + 8) = 0$ dır.

$\Rightarrow m^2 + 10m + 25 - 4m - 32 = 0$

$\Rightarrow m^2 + 6m - 7 = 0 \Rightarrow (m - 1).(m + 7) = 0$

$\Rightarrow m - 1 = 0$ veya $m + 7 = 0$

$\Rightarrow m = 1$ veya $m = -7$ bulunur.

Örnek:

$x^2 - 4x + k - 2 = 0$ denkleminin eşit (çakışık) iki reel kökü olduğuna göre k kaç olmalıdır?

Çözüm:

Çakışık iki kök varsa $\Delta = 0$ dır. Buna göre,

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.(k - 2) = 0$ dır.

$\Rightarrow 16 - 4k + 8 = 0 \Rightarrow 24 - 4k = 0 \Rightarrow k = 6$

olmalıdır.

Örnek:

$3x^2 - 5x + k - 1 = 0$ denkleminin farklı iki reel kökü olduğuna göre k nin değişim aralığını bulalım.

Çözüm:

Denkleminin farklı iki reel kökü olduğuna göre $\Delta > 0$ olmalıdır.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.3.(k-1) > 0$$

$$\Rightarrow 25 - 12k + 12 > 0 \Rightarrow -12k > -37 \Rightarrow k < \frac{37}{12} \text{ olur.}$$

Uyarı:

Bir denklemin kökleri denklemi sağlarlar.

Örnek:

İkinci dereceden bir bilinmeyenli $x^2 + x - 6 = 0$ denklemi veriliyor. 2 ve -3 sayıları bu denklemin kökü müdür?

Çözüm:

Denklemin kökleri denklemi sağlarlar.

$x^2 + x - 6 = 0$ denkleminde x yerine 2 ve -3 yazalım.

$x = 2$ için; $2^2 + 2 - 6 = 0 \Rightarrow 4 + 2 - 6 \Rightarrow 0 = 0$ sağlar.

$x = -3$ için; $(-3)^2 - 3 - 6 = 0 \Rightarrow 9 - 3 - 6 \Rightarrow 0 = 0$ sağlar.

O halde 2 ve -3 sayıları bu denklemin köküdürler.

İkinci Dereceden Bir Denkleme Dönüştürülebilen Denklemlerin Çözümü

Burada ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olmadığı halde bazı düzenlemelerle ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlere dönüşebilen denklemleri ele alacağız.

1) Polinomların Çarpımı veya Bölümü Şeklindeki Denklemlerin Çözümü

Kural:

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere,

- $P(x).Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = 0$ veya $Q(x) = 0$ dır.
- $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Rightarrow P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0$ dır.

Örnek:

$(x^2 + x)(x^2 - 4) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$(x^2 + x)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0$ veya $x^2 - 4 = 0$ dır.

Buna göre,

$x^2 + x = 0$ ise; $x.(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = -1$ dir…(1)

$x^2 - 4 = 0$ ise; $x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 2$ dir...(2)

(1) ve (2) deki köklerin birleşimi verilen denklemin çözüm kümesidir.

$Ç = \{-2, -1, 0, 2\}$ dir.

Örnek:

$(x^3 - 1)(x^2 + 1) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$(x^3 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$ veya $x^2 + 1 = 0$ dır.

Buna göre,

$x^3 - 1 = 0$ ise; $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Ç_1 = \{1\}$ dir.

$x^2 + 1 = 0$ ise; $\Delta = 0 - 4.1.1 = -4 < 0 \Rightarrow Ç_2 = \phi$ dir.

O halde verilen denklemin reel sayılardaki çözüm kümesi,

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{1\}$ dir.

Örnek:

$\frac{4x^2 - 9}{x + 2} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{4x^2-9}{x+2}=0 \Rightarrow 4x^2-9=0 \quad \text{ve} \quad x+2\neq 0 \text{ dır.}$$

$4x^2-9=0$ ise; $(2x+3).(2x-3)=0$

ise; $2x+3=0$ veya $2x-3=0$

ise; $x=-\frac{3}{2}$ veya $x=\frac{3}{2}$ dir.

$x+2\neq 0$ ise; $x\neq -2$ dir.

Verilen denklemin reel sayılardaki çözüm kümesi,

$Ç=\left\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$ dir.

Örnek:

$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \text{ ve } x^2-3x+2\neq 0$$

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3).(x-1)=0$

$\Rightarrow x+3=0$ veya $x-1=0$

$\Rightarrow x_1=-3$ veya $x_2=1$ dir.

$x^2-3x+2\neq 0 \Rightarrow (x-2).(x-1)\neq 0$

$\Rightarrow x\neq 2$ ve $x\neq 1$ dir.

Verilen denklemin reel sayılardaki çözüm kümesi,

$Ç=\{-3\}$ tür.

Örnek:

$(x-3).(x^2-6x+5)=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$(x-3).(x^2-6x+5)=0$ ise,

$x-3=0$ veya $x^2-6x+5=0$ dır.

$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow Ç_1=\{3\}$ tür.

$x^2-6x+5=0 \Rightarrow (x-5).(x-1)=0$ olup,

$x-5=0 \Rightarrow x=5$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ dir.

Buna göre, $Ç_2=\{1,5\}$ tir. O halde verilen denklemin reel sayılardaki çözüm kümesi,

$Ç=Ç_1\cup Ç_2=\{1,3,5\}$ bulunur.

Örnek:

$\frac{x^2+2x-8}{x^2-16}=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-16}=0 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \text{ ve } x^2-16\neq 0$$

$x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x+4).(x-2)=0$

$\Rightarrow x+4=0$ veya $x-2=0$

$\Rightarrow x_1=-4$ veya $x_2=2$ dir.

$x^2-16\neq 0 \Rightarrow (x-4).(x-4)\neq 0$

$\Rightarrow x\neq 4$ ve $x\neq -4$ dir.

Verilen denklemin reel sayılardaki çözüm kümesi,

$Ç = \{2\}$ dir.

2) Değişken Değiştirilerek Çözülebilen Denklemler

Uygun bir değişken değiştirmesi yapılır. Yeni değişkene göre elde edilen ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem çözülür. Değişken değiştirme bağıntısından ilk değişkenin değerleri bulunur.

Örnek:

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow \left(x^2\right)^2 - 10x^2 + 9 = 0$ dır. Bu denklemde $x^2 = a$ dönüşümü yapılırsa,

$a^2 - 10a + 9 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse,

$a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow (a-9).(a-1) = 0$

$\Rightarrow a - 9 = 0$ veya $a - 1 = 0$

$\Rightarrow a = 9$ veya $a = 1$ dir.

$x^2 = a$ olduğuna göre,

$a = 9$ için $x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$ ve $x_2 = -3$ bulunur.

$a = 1$ için $x^2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$ ve $x_4 = -1$ bulunur.

Verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-3, -1, 1, 3\}$ tür.

Örnek:

$16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$16x^4 - 17x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 16\left(x^2\right)^2 - 17x^2 + 1 = 0$ dır. Bu denklemde $x^2 = u$ dönüşümü yapılırsa,

$16u^2 - 17u + 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse,

$16u^2 - 17u + 1 = 0 \Rightarrow (16u - 1).(u - 1) = 0$

$\Rightarrow 16u - 1 = 0$ veya $u - 1 = 0$

$\Rightarrow u = \frac{1}{16}$ veya $u = 1$ dir.

$x^2 = u$ olduğuna göre,

$u = \frac{1}{16}$ için $x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4}$ ve $x_2 = \frac{1}{4}$ bulunur.

$u = 1$ için $x^2 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$ ve $x_4 = -1$ bulunur.

Verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \left\{-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right\}$ dir.

Örnek:

$\left(x^2 - 1\right)^2 - 5\left(x^2 - 1\right) + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\left(x^2 - 1\right)^2 - 5\left(x^2 - 1\right) + 4 = 0$ denkleminde $x^2 - 1 = t$ dönüşümü yapılırsa, $t^2 - 5t + 4 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklem çözülürse,

$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t - 1).(t - 4) = 0$

$\Rightarrow t - 1 = 0$ veya $t - 4 = 0$

$\Rightarrow t = 1$ veya $t = 4$ tür.

$x^2-1=t$ olduğuna göre,

$t=1$ için;

$x^2-1=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x_1=-\sqrt{2}$ ve $x_2=\sqrt{2}$ bulunur.

$t=4$ için;

$x^2-1=4 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x_3=-\sqrt{5}$ ve $x_4=\sqrt{5}$ bulunur.

Verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç=\{-\sqrt{5},-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{5}\}$ tir.

Örnek:

$2^{2x}-6.2^x+8=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$2^{2x}-6.2^x+8=0 \Rightarrow (2^x)^2-6.2^x+8=0$ denkleminde $2^x=a$ dönüşümü yapılırsa, $a^2-6a+8=0$ denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse,

$a^2-6a+8=0 \Rightarrow (a-2).(a-4)=0$

$\Rightarrow a-2=0$ veya $a-4=0$

$\Rightarrow a=2$ veya $a=4$

$2^x=a$ olduğuna göre,

$a=2$ için; $2^x=2 \Rightarrow 2^x=2^1 \Rightarrow x_1=1$ bulunur.

$a=4$ için;

$2^x=4 \Rightarrow 2^x=2^2 \Rightarrow x_2=2$ bulunur.

Verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç=\{1,2\}$ dir.

3) Köklü Denklemlerin Çözümü

Bir denklemde bilinmeyen kök içerisinde bulunuyorsa bu denkleme köklü denklem denir. Denklemde köklü terim bir tane ise, köklü terim eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır. Sonra kökün dercesine göre kuvvet alınır. Gerekli işlemler yapılarak denklem çözülür. Denklemde köklü terim sayısı iki tane ise, köklü terimler eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır. Gerekli kuvvet alma işlemleri yapılarak denklem rasyonel hale dönüştürülür. Bulunan çözümlerin denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir. Denklemin kök kuvveti çift ise bulunan kök değerleri denklemi sağlamayabilir.

Örnek:

$\sqrt{3x+1}-x=1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{3x+1}-x=1 \Rightarrow \sqrt{3x+1}=x+1$ dir. Kökün derecesi 2 olduğundan her iki tarafın karesi alınırsa,

$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=(x+1)^2 \Rightarrow 3x+1=x^2+2x+1$

$\Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x.(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ veya $x-1=0$

$x_1=0$ veya $x_2=1$ bulunur. Bulunan bu değerlerin denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

$x=0$ için $\sqrt{3.0+1}-0=1 \Rightarrow \sqrt{1}=1 \Rightarrow 1=1$ sağlanır.

$x=1$ için $\sqrt{3.1+1}-1=1 \Rightarrow \sqrt{4}-1=1 \Rightarrow 1=1$ sağlanır.
Bulunan bu değerlerin her ikisi de denklemi sağladığından denklemin köküdürler. O halde,

$Ç=\{0,1\}$ dir.

Örnek:

$\sqrt{x-7}-2=0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{x-7}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x-7}=2$ dir. Kökün derecesi 2 olduğundan her iki tarafın karesi alınırsa,

$\left(\sqrt{x-7}\right)^2=2^2 \Rightarrow x-7=4 \Rightarrow x=11$ bulunur.

Bulunan bu değerin denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

$x=11$ için $\sqrt{11-7}-2=0 \Rightarrow \sqrt{4}=2 \Rightarrow 2=2$ sağlanır.

Bulunan bu değer denklemi sağladığından denklemin köküdürler.

O halde, $Ç=\{11\}$ dir.

Örnek:

$\sqrt{x+3}=3x-1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{x+3}=3x-1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2=(3x-1)^2$

$\Rightarrow x+3=9x^2-6x+1 \Rightarrow 9x^2-7x-2=0$

$9x^2-7x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4.9.(-2)$

$\Delta=49+72=121>0$ olduğundan denklemin birbirinden farklı iki reel kökü vardır.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-7)-\sqrt{12}}{2.9}=\dfrac{7-11}{18}=-\dfrac{2}{9}$ ve

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-7)+\sqrt{121}}{2.9}=\dfrac{7+11}{18}=1$

Bulunan bu değerlerin denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

$x=-\dfrac{2}{9}$ için $\sqrt{-\dfrac{2}{9}+3}=3.\left(-\dfrac{2}{9}\right)-1 \Rightarrow \dfrac{5}{3}\neq-\dfrac{5}{3}$

olduğundan denklemi sağlamaz. O halde kök değildir.

$x=1$ için $\sqrt{1+3}=3.1-1 \Rightarrow \sqrt{4}=2 \Rightarrow 2=2$ sağlanır.

O halde, $Ç=\{2\}$ dir.

Örnek:

$\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+3}=2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

Çözüm:

$\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+3}=0 \Rightarrow \sqrt{2x+5}=\sqrt{x+3}+2$ tür.
Kökün derecesi 2 olduğundan her iki tarafın karesi alınırsa,

$\Rightarrow \left(\sqrt{2x+5}\right)^2=\left(\sqrt{x+3}+2\right)^2$

$\Rightarrow 2x+5=x+3+4\sqrt{x+3}+4$

$\Rightarrow x-2=4\sqrt{x+3}$ olur. Tekrar her iki tarafın karesi alınırsa,

$\Rightarrow (x-2)^2=\left(4\sqrt{x+3}\right)^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4=16x+48 \Rightarrow x^2-20x-44=0$

$\Rightarrow (x-22).(x+2)=0 \Rightarrow x-22=0$ veya $x+2=0$

$\Rightarrow x_1=22$ veya $x_2=-2$ dir.

Bulunan bu değerlerin denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

$x=22$ için $\sqrt{2.22+5}-\sqrt{22+3}=2$

$\Rightarrow \sqrt{49}-\sqrt{25}=2$

$\Rightarrow 7-5=2 \Rightarrow 2=2$ sağlanır.

$x=-2$ için, $\sqrt{2.(-2)+5}-\sqrt{(-2)+3}=2$

$\Rightarrow 1-1=2 \Rightarrow 0\neq 2$ bulunur.

$x=-2$ değeri denklemi sağlamaz. O halde,

$Ç=\{22\}$ bulunur.

Örnek:

$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+4}=3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

Çözüm:

$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+4}=3 \Rightarrow \sqrt{2x+4}=3-\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2x+4}\right)^2=\left(3-\sqrt{x+1}\right)^2$

$\Rightarrow 2x+4=9-6\sqrt{x+1}+x+1$

$\Rightarrow x-6=-6\sqrt{x+1} \Rightarrow (x-6)^2=\left(-6\sqrt{x+1}\right)^2$

$\Rightarrow x^2-12x+36=36x+36 \Rightarrow x^2-48x=0$

$\Rightarrow x.(x-48)=0 \Rightarrow x=0$ veya $x=48$
bulunur.

$x=0$ için $\sqrt{0+1}+\sqrt{2.0+4}=3$

$1+2=3 \Rightarrow 3=3$ sağlanır.

$x=48$ için $\sqrt{48+1}+\sqrt{2.48+4}=3$

$7+10=3 \Rightarrow 17\neq 3$ bulunur. $x=48$ değeri

denklemi sağlamaz. O halde,

$Ç=\{0\}$ bulunur.

Örnek:

$\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

Çözüm:

$\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2 \Rightarrow \left(\sqrt{x+\sqrt{x-2}}\right)^2=2^2$

$\Rightarrow x+\sqrt{x-2}=4 \Rightarrow \sqrt{x-2}=4-x$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^2=(4-x)^2 \Rightarrow x-2=16-8x+x^2$

$\Rightarrow x^2-9x+18=0$

$\Rightarrow (x-3).(x-6)=0 \Rightarrow x-3=0$ veya $x-6=0$

$\Rightarrow x=3$ veya $x=6$ dır.

$x=3$ için $\sqrt{3+\sqrt{3-2}}=2 \Rightarrow \sqrt{3+1}=2 \Rightarrow 2=2$

$x=6$ için $\sqrt{6+\sqrt{6-2}}=2 \Rightarrow \sqrt{6+2}=2 \Rightarrow \sqrt{8}\neq 2$

$x=6$ değeri denklemi sağlamaz. O halde,

$Ç=\{3\}$ bulunur.

4) Mutlak Değer İçeren Denklemler

Mutlak değer içeren denklemlerde mutlak değer içini pozitif veya negatif yapan x değerleri belirlenir. Buna göre, mutlak değerli ifadenin eşiti yazılır. Elde edilen denklem çözülür.

Örnek:

$x.|x-1|=12$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

Çözüm:

$x.|x-1|=12$ denkleminin köklerini bulmak için $|x-1|$ ifadesini incelemek gerekir.

1.Durum

$x-1\geq 0$ ise $x\geq 1$ olup $|x-1|=x-1$ olduğundan,

$x.|x-1|=12 \Rightarrow x.(x-1)=12 \Rightarrow x^2-x-12=0$

$\Rightarrow (x-4).(x+3)=0$

$\Rightarrow x=4$ veya $x=-3$

bulunur. Ancak $x\geq 1$ olduğundan $x=-3$ kök olamaz.

O halde $x\geq 1$ iken denklemin kökü 4 tür. Bu değer denklemde yazılırsa denklemi sağladığı görülür.

2.Durum

$x-1<0$ ise $x<1$ olup $|x-1|=-x+1$ olduğundan,

$x.|x-1|=12 \Rightarrow x.(-x+1)=12 \Rightarrow -x^2+x-12=0$

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1^2-4.(-1).(-12)$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 48 = -47 < 0$$

olduğundan denklemin reel kökü yoktur. O halde verilen denklemin çözüm kümesi, $Ç = \{4\}$ tür.

Örnek:

$x^2 - 2.|x| - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

Çözüm:

$x^2 - 2.|x| - 3 = 0$ denkleminin köklerini bulmak için $|x|$ ifadesini incelemek gerekir.

1.Durum

$x \geq 0$ ise $|x| = x$ olup

$$x^2 - 2.|x| - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3).(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ veya } x = -1$$

bulunur. Ancak $x \geq 0$ olduğundan $x = -1$ kök olamaz. O halde $x \geq 0$ iken denklemin kökü 3 tür. Bu değer denklemde yazılırsa denklemi sağladığı görülür.

2.Durum

$x < 0$ ise $|x| = -x$ olup

$$x^2 - 2.|x| - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3).(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 \text{ veya } x_2 = 1$$

olur. Ancak $x < 0$ olduğundan $x = 1$ kök olamaz. O halde $x < 0$ iken denklemin kökü -3 tür. Bu değer denklemde yazılırsa denklemi sağladığı görülür.

O halde verilen denklemin çözüm kümesi, $Ç = \{-3, 3\}$ tür.

Örnek:

$|4 - x^2| = |x - 2|$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

Çözüm:

$$|4 - x^2| = |x - 2| \Rightarrow |(2 - x).(2 + x)| = |x - 2|$$

$$\Rightarrow |2 - x|.|2 + x| = |x - 2|$$

$$\Rightarrow |x - 2|.|x + 2| = |x - 2|$$

$$\Rightarrow |x - 2|.|x + 2| - |x - 2| = 0$$

$$\Rightarrow |x - 2|.(|x + 2| - 1) = 0$$

$$\Rightarrow |x - 2| = 0 \text{ veya } |x + 2| - 1 = 0$$

elde edilir.

$|x - 2| = 0$ ise $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

$|x + 2| - 1 = 0$ ise $|x + 2| = 1$ olup, buradan

$$x + 2 = 1 \text{ veya } x + 2 = -1 \text{ dir.}$$

$$x = -1 \text{ veya } x = -3 \text{ bulunur.}$$

O halde $|4 - x^2| = |x - 2|$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{-3, -1, 2\}$ olur.

Örnek:

$x^2 - |3x - 4| = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

Çözüm:

$x^2 - |3x - 4| = 0$ denkleminin köklerini bulmak için $3|x - 4|$ ifadesini incelemek gerekir.

1.Durum

$3x-4 \geq 0$ ise $x \geq \frac{4}{3}$ olup $|3x-4| = 3x-4$ olduğundan,

$x^2 - |3x-4| = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemde

$\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$ olduğundan reel kök yoktur.

2.Durum

$3x-4 < 0$ ise $x < \frac{4}{3}$ olup $|3x-4| = -3x+4$ olduğundan,

$x^2 - |3x-4| = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemde

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 > 0$ olup iki farklı reel kök vardır.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2.1} = \frac{-3-5}{2} = -4 \text{ ve}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2.1} = \frac{-3+5}{2} = 1$$

bulunur. x_1 ve x_2 değerleri $x < \frac{4}{3}$ koşulunu sağlarlar.

O halde $x^2 - |3x-4| = 0$ denkleminin çözüm kümesi,
$Ç = \{-4, 1\}$ dir.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Bir Denklemin Kökleri İle Katsayıları Arasındaki Bağıntılar

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta > 0$ iken
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ olmak üzere iki farklı reel kök vardır. Bu iki eşitlik kullanılarak kökler ile katsayılar arasında çeşitli bağıntılar bulunabilir.

a. Kökler Toplamı

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}} \text{ dır.}$$

Örnek:

$3x^2 - 6x - 1 = 0$ denkleminin kökleri toplamını bulalım.

Çözüm:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{3} = -(-2) = 2 \text{ bulunur.}$$

b. Kökler Çarpımı

$$x_1 . x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \text{ bulunur.}$$

O halde $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökler çarpımı,

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}} \text{ dır.}$$

Örnek:

$3x^2 - 6x - 1 = 0$ denkleminin kökleri çarpımını bulalım.

Çözüm:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

c. Köklerin Farkının Mutlak Değeri

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \text{ dır.}$$

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerinin farkının mutlak değeri,

$$\boxed{\left|x_1-x_2\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$ dır.

Örnek:

$4x^2-5x+1=0$ denkleminin köklerinin farkının mutlak değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left|x_1-x_2\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|4|}=\frac{\sqrt{25-4.4.1}}{4}=\frac{3}{4}$$ tür.

Örnek:

$2x^2-8x-3=0$ denkleminin kökler toplamını ve çarpımını bulunuz.

Çözüm:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-8}{2}=4\ ,\ x_1.x_2=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}$$ dir.

Örnek:

$5x^2-15x+p=0$ denkleminin kökleri çarpımının 2 olması için p kaç olmalıdır?

Çözüm:

$$x_1.x_2=2\Rightarrow\frac{c}{a}=2\Rightarrow\frac{p}{5}=2\Rightarrow p=5.2=10$$ bulunur.

Örnek:

$x^2+mx+6=0$ denkleminin kökleri toplamı 5 olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm:

$$x_1+x_2=5\Rightarrow-\frac{b}{a}=5\Rightarrow-\frac{m}{1}=5\Rightarrow m=-5$$ olur.

Örnek:

$3x^2-6x-1=0$ denkleminin köklerinin farkının mutlak değerini bulalım.

Çözüm:

$$\left|x_1-x_2\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|3|}=\frac{\sqrt{36-4.3.(-1)}}{3}=\frac{\sqrt{48}}{3}$$

tür.

Örnek:

$2x^2+6x-5=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre $x_1.x_2^2+x_2.x_1^2$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$2x^2+6x-5=0$ denkleminde

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}=-\frac{5}{2}\ \text{ve}\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{6}{2}=-3$$ tür.

$$x_1.x_2^2+x_2.x_1^2=x_1.x_2.(x_2+x_1)=-3.\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{2}$$

bulunur.

Örnek:

$2x^2+3x+m=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{2}$ olduğuna göre m nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$2x^2+3x+m=0$ denkleminde

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{m}{2}\ \text{ve}\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$$ dir.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{m}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-3}{m} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3m = -6 \Rightarrow m = -2 \text{ bulunur.}$$

Sonuç

$$\boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}} \text{ dir.}$$

Örnek:

$x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre $x_1^2 + x_2^2$ nin değerini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminde

$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{1} = -1$ ve $x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2$ dir.

$$(x_1 + x_2) = 2^2 \Rightarrow x_1^2 + 2.x_1.x_1 + x_2^2 = 4$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.x_1.x_1 = 4$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.(-1) = 4$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 4 + 2 = 6 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$2x^2 - 5x - m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$2.x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$ olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm:

$2x^2 - 5x - m - 1 = 0$ denkleminde

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$ dir.

Buna göre,

$2.x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$ ve $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ eşitlikleri toplanırsa,

$$2.x_1 - x_2 + x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow 3x_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow 3x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ bulunur.}$$

$x_1 = 1$ değeri $2x^2 - 5x - m - 1 = 0$ denkleminin kökü olduğundan denklemi sağlar.

O halde $x = 1$ için,

$$2.1^2 - 5.1 - m - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 5 - m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = -4 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$3x^2 + (m-2)x - m^2 = 0$ denkleminin, mutlak değerce eşit ve ters işaretli (simetrik) iki kökü olduğuna göre, m nin değerini bulalım.

Çözüm:

$3x^2 + (m-2)x - m^2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Denklemin kökleri mutlak değerce eşit ve ters işaretli olduğuna göre,

$x_1 = -x_2$ yani $x_1 + x_2 = 0$ dır. Buna göre,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -\frac{m-2}{3} = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ dir.}$$

Örnek:

$4x^2 - 7x + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ toplamını bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1.x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{a}.\frac{a}{c}=-\frac{b}{c}=-\frac{-7}{2}=\frac{7}{2}$$

Örnek:

$-5x^2-3x+1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1^2+x_2^2$ toplamını bulunuz.

Çözüm:

$-5x^2-3x+1=0$ denkleminde

$x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$ ve $x_1+x_2=-\frac{-3}{-5}=-\frac{3}{5}$ dir.

$$(x_1+x_2)=\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow x_1^2+2.x_1.x_1+x_2^2=\frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+2.x_1.x_1=\frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+2.\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=\frac{9}{25}+\frac{2}{5}=\frac{19}{25} \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$7x^2+5x-3=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ toplamını bulunuz.

Çözüm:

$7x^2+5x-3=0$ denkleminde $x_1.x_2=\frac{c}{a}=-\frac{3}{7}$ dir.

$$\Rightarrow (x_1.x_2)^2=\left(-\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow x_1^2.x_2^2=\frac{9}{49} \text{ dur.}$$

$7x^2+5x-3=0$ denkleminde $x_1+x_2=-\frac{5}{7}$ dir.

$$(x_1+x_2)=\left(-\frac{5}{7}\right)^2 \Rightarrow x_1^2+2.x_1.x_1+x_2^2=\frac{25}{49}$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+2.x_1.x_1=\frac{25}{49}$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+2.\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{25}{49}$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=\frac{25}{49}+\frac{6}{7}=\frac{67}{49} \text{ olur.}$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2.x_2^2}=\frac{\frac{67}{49}}{\frac{9}{49}}=\frac{67}{49}.\frac{49}{9}=\frac{67}{9} \text{ dur.}$$

Örnek:

$x^2-3x-4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1^3+x_2^3$ toplamını bulunuz.

Çözüm:

$x^2-3x-4=0$ denkleminde $x_1+x_2=-\frac{-3}{1}=3$ ve

$x_1.x_2=\frac{-4}{1}=-4$ tür.

$$\Rightarrow (x_1+x_2)^3=3^3=27$$

$$\Rightarrow x_1^3+3x_1^2.x_2+3x_1.x_2^2+x_2^3=27$$

$$\Rightarrow x_1^3+x_2^3+3x_1.x_2.(x_1+x_2)=27$$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + 3.(-4).3 = 27$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 - 36 = 27 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = 63$ bulunur.

Örnek:

$mx^2 + (m-1)x + 2 = 0$ denkleminde m kaç olmalıdır ki denklemin reel köklerinin toplamı 5 olsun.

Çözüm:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5 \Rightarrow -\frac{m-1}{m} = 5$

$-m + 1 = 5m \Rightarrow 6m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{6}$ olur.

Örnek:

$x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminde köklerin ikişer fazlasının toplamını bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

Bunların ikişer fazlasının toplamı,

$x_1 + 2 + x_2 + 2 = x_1 + x_2 + 4 = -\frac{-3}{1} + 4 = 3 + 4 = 7$ dir.

Örnek:

$x^2 + 2x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $(x_1+1).(x_2+1)$ çarpımının sonucunu bulalım.

Çözüm:

$(x_1+1).(x_2+1) = x_1.x_2 + x_1 + x_2 + 1$ dir.

$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -2$ ve $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2$ değerleri yerine yazılırsa,

$(x_1+1).(x_2+1) = x_1.x_2 + x_1 + x_2 + 1$

$= (-2) + (-2) + 1 = -3$ bulunur.

Örnek:

$x^2 + (4a-3)x + 3a - 5 = 0$ denkleminde, kökler toplamı, kökler çarpımına eşit ise a sayısını bulalım.

Çözüm:

$x^2 + (4a-3)x + 3a - 5 = 0$ denkleminde,

Kökler toplamı, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4a-3}{1} = -4a + 3$

Kökler çarpımı, $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3a-5}{1} = 3a - 5$

$\Rightarrow -4a + 3 = 3a - 5 \Rightarrow -7a = -8 \Rightarrow a = \frac{8}{7}$ bulunur.

Örnek:

$(m+3)x^2 + (m-3)x + 7m - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Denklemin kökleri arasında $x_1 = \frac{1}{x_2}$ bağıntısı varsa m değerini bulalım.

Çözüm:

$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1.x_2 = 1$ dir.

$\Rightarrow x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{7m-1}{m+3} = 1 \Rightarrow m + 3 = 7m - 1$

$\Rightarrow 6m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ bulunur.

Örnek:

$m^2x^2+(m-2)x-1=0$ denkleminin simetrik iki kökünün olması için m kaç olmalıdır?

Çözüm:

$m^2x^2+(m-2)x-1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Denklemin kökleri simetrik ise mutlak değerce eşit ve ters işaretlidirler.

Buna göre

$x_1=-x_2$ yani $x_1+x_2=0$ dır.

O halde,

$x_1+x_2=-\frac{m-2}{m^2}=0 \Rightarrow -m+2=0 \Rightarrow m=2$ dir.

Örnek:

$x^2-2x+m-3=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Denklemin kökleri arasında $x_1-2x_2=3$ bağıntısı varsa m sayısını bulalım.

Çözüm:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{1}=2$ dir. Kökler arasında,

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2&=3 \\ x_1+x_2&=2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} -x_1+2x_2&=-3 \\ x_1+x_2&=2 \end{aligned}\right\} x_2=-\frac{1}{3} \text{ tür.}$$

$x_2=-\frac{1}{3}$ denklem kök olduğundan denklemi sağlar.

$x_2=-\frac{1}{3}$ için,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2.\left(-\frac{1}{3}\right)+m-3=0 \Rightarrow \frac{1}{9}+\frac{2}{3}+m-3=0$$

$\Rightarrow m=3-\frac{7}{9}=\frac{20}{9}$ bulunur.

Örnek:

$$\left.\begin{aligned} x^2-2x+m-1&=0 \\ 4x^2-x+4m+3&=0 \end{aligned}\right\} \text{ denklemlerinin birer kökü ortaktır.}$$

Buna göre m kaçtır?

Çözüm:

Her iki denklemde ortak kök $x=p$ olsun. Bu değer her iki denklemi de sağlayacağından, denklemlerde x yerine p yazalım. Oluşan denklem sistemini çözelim.

$$\left.\begin{aligned} p^2-2p+m-1&=0 \\ 4p^2-p+4m+3&=0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -4p^2+8p-4m+4&=0 \\ 4p^2-p+4m+3&=0 \end{aligned}\right\} p=-1$$

bulunur. $x=p=-1$ değerini $p^2-2p+m-1=0$ denkleminde yerine yazalım,

$$(-1)^2-2.(-1)+m-1=0 \Rightarrow 1+2+m-1=0$$

$$\Rightarrow 2+m=0 \Rightarrow m=-2$$

bulunur.

Örnek:

$x^2-7x+5=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\dfrac{2x_1+2x_2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm:

$x^2-7x+5=0$ denkleminde $x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{1}=5$ dir.

$$\frac{2x_1+2x_2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}=\frac{2.(x_1+x_2)}{\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}}=2.x_1.x_2=2.5=10 \text{ dur.}$$

Örnek:

$x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$5.x_1^2 - 4.x_1^2.x_2 + 5.x_2^2 - 4.x_1.x^2$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminde

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$ ve $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$

$(x_1 + x_2)^2 = 3^2 \Rightarrow x_1^2 + 2.x_1.x_2 + x_2^2 = 9$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.x_1.x_2 = 9$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.(-4) = 9$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 9 + 8 = 17$ dir.

O halde,

$5.x_1^2 - 4.x_1^2.x_2 + 5.x_2^2 - 4.x_1.x^2$

$= 5.\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 4.x_1.x_2.(x_1 + x_2)$

$= 5.17 - 4.(-4).3 = 85 + 48 = 133$

bulunur.

Kökleri Verilmiş Olan İkinci Dereceden Denklemin Yazılması

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin her tarafını a ile bölelim

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ olur.

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise,

$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ ve $\frac{c}{a} = x_1.x_2$ olduğundan son eşitlikte,

$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0$

olur.

O halde kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem

$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0}$ dir.

Örnek:

Kökleri $x_1 = 3$ ve $x_2 = 4$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

Köklerin toplamı $x_1 + x_2 = 3 + 4 = 7$,

Köklerin çarpımı $x_1.x_2 = 3.4 = 12$ olup, Kökleri

$x_1 = 3$ ve $x_2 = 4$ olan ikinci dereceden denklem

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$ dır.

Örnek:

Kökleri -3 ve 5 olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

Kökleri -3 ve 5 olan ikinci dereceden denklem

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$ dır.

Örnek:

Kökleri $x_1 = 5 + \sqrt{3}$ ve $x_2 = 5 - \sqrt{3}$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

Köklerin toplamı $x_1 + x_2 = 5+\sqrt{3}+5-\sqrt{3} = 10$,

Köklerin çarpımı $x_1 . x_2 = \left(5+\sqrt{3}\right).\left(5-\sqrt{3}\right) = 25-3 = 22$

olup, Kökleri $x_1 = 5+\sqrt{3}$ ve $x_2 = 5-\sqrt{3}$ olan ikinci dereceden denklem

$$x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1 . x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 22 = 0 \text{ dır.}$$

Örnek:

Kökleri $3+\sqrt{5}$ ve $3-\sqrt{5}$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

Kökleri $3+\sqrt{5}$ ve $3-\sqrt{5}$ olan ikinci dereceden denklem

$$x^2 - \left(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}\right)x + \left(3+\sqrt{5}\right).\left(3-\sqrt{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 3^3 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \text{ dır.}$$

Örnek:

Çözüm kümesi $Ç = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

Kökleri $-\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ olan ikinci dereceden denklem

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right).\frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{6}.x + \left(-\frac{2}{6}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{2}{6} = 0 \text{ dır.}$$

Kural

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere, kökleri $mx_1 + n$ ve $mx_2 + n$ olan ikinci dereceden denklemi yazmak için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde x yerine $\frac{x-n}{m}$ yazılır.

Örnek:

$x^2 + 2x + 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere, kökleri $2x_1 + 1$ ve $2x_2 + 1$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

$x^2 + 2x + 5 = 0$ denkleminde x yerine $\frac{x-1}{2}$ yazılırsa,

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 2.\frac{x-1}{2} + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{4} + x - 1 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{4} + x + 4 = 0$$

Paydadan kurtulması için eşitliğin her tarafı 4 ile çarpılırsa,

$$\Rightarrow 4.\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{4} + x + 4\right) = 4.0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 17 = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$x^2 - 5x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $2x_1$ ve $2x_2$ olan ikinci dereceden denklem yazalım.

Çözüm:

I.Yol

İstenilen denklemin kökleri $2x_1$ ve $2x_2$ ise,
Köklerin toplamı

$$2x_1 + 2x_2 = 2.(x_1 + x_2) = 2.\left(-\frac{-5}{1}\right) = 10\ ,$$

Köklerin çarpımı,

$$2x_1.2x_2 = 4.x_1.x_2 = 4.\frac{3}{1} = 12 \text{ olup}$$

Kökleri $2x_1$ ve $2x_2$ olan ikinci dereceden denklem,

$x^2 - 10x + 12 = 0$ dır.

II.Yol

$x^2 - 5x + 3 = 0$ denkleminde x yerine $\frac{x}{2}$ yazılırsa,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 5.\frac{x}{2} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{2} + 3 = 0$$

Paydadan kurtulması için eşitliğin her tarafı 4 ile çarpılırsa,

$$4.\frac{x^2}{4} - 4.\frac{5x}{2} + 4.3 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 12 = 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
Kökleri $2x_1$ - 3 ve $2x_2 - 3$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

I.Yol

$x^2 - 2x - 4 = 0$ denkleminde x yerine $\frac{x+3}{2}$ yazılırsa,

$$\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 2.\frac{x+3}{2} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x + 9}{4} - x - 3 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x + 9}{4} - x - 7 = 0$$

Paydadan kurtulması için eşitliğin her tarafı 4 ile çarpılırsa,

$$4.\frac{x^2 + 6x + 9}{4} - 4.x - 4.7 = 4.0$$

$$x^2 + 6x + 9 - 4x - 28 \Longrightarrow x^2 + 2x - 19 = 0 \text{ bulunur.}$$

II.Yol

Kökler toplamı

$$2x_1 - 3 + 2x_2 - 3 = 2.(x_1 + x_2) - 6$$

$$= 2.\left(-\frac{-2}{1}\right) - 6 = -2$$

Köklerin çarpımı

$$(2x_1 - 3)(2x_2 - 3) = 4x_1.x_2 - 6x_1 - 6x_2 + 9$$

$$= 4x_1.x_2 - 6(x_1 + x_2) + 9$$

$$= 4.\frac{-4}{1} - 6.\left(-\frac{-2}{1}\right) + 9$$

$$= -16 - 12 + 9 = -19$$

Kökleri $2x_1$ - 3 ve $2x_2 - 3$ olan ikinci dereceden denklem,

$$x^2 - (-2)x + (-19) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 19 = 0 \text{ dır}$$

Örnek:

$x^2 - 4x - 7 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $x_1 + 1$ ve $x_2 + 1$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

I.Yol

İstenilen denklemin kökleri $x_1 + 1$ ve $x_2 + 1$ ise,

Köklerin toplamı

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2 = \left(-\frac{-4}{1}\right) + 2 = 6 ,$$

Köklerin çarpımı,

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1.x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

$$= \frac{-7}{1} - \frac{-4}{1} + 1 = -2 \text{ olup}$$

Kökleri $x_1 + 1$ ve $x_2 + 1$ olan ikinci dereceden denklem,

$x^2 - 6x - 2 = 0$ dır.

II.Yol

$x^2 - 4x - 7 = 0$ denkleminde x yerine $x - 1$ yazılırsa,

$$(x-1)^2 - 4.(x-1) - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 4x + 4 - 7 = 0$$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 2 = 0$ bulunur.

Örnek:

$x^2 + x + 5 = 0$ denkleminin köklerinin çarpma işlemine göre terslerini kök kabul eden ikinci dereceden denklemi bulalım.

Çözüm:

$x^2 + x + 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

Kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan denklem soruluyor.

Kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan denklem,

$$x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2} = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2} = 0$$

$$x^2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2}.x + \frac{1}{x_1.x_2} = 0$$

$$x^2 - \frac{-1}{5}.x + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{x}{5} + \frac{1}{5} = 0$$

Paydadan kurtulması için eşitliğin her tarafı 5 ile çarpılırsa,

$5x^2 + x + 1 = 0$ bulunur.

Örnek:

$x^2 - x + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Kökleri $\frac{1}{x_1^2}$ ve $\frac{1}{x_2^2}$ olan ikinci dereceden denklemi yazalım.

Çözüm:

$x^2 - x + 6 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise,

$$x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1 \text{ ve } x_1.x_2 = \frac{6}{1} = 6 \text{ dır.}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 + 2.x_1.x_2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.x_1.x_2 = 1$$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.6 = 1$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1 - 12 = -11$ dir.

Kökleri $\frac{1}{x_1^2}$ ve $\frac{1}{x_2^2}$ olan ikinci dereceden denklemin kökler toplamı,

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 . x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 . x_2)^2} = \frac{-11}{6^2} = -\frac{11}{36}$$

Kökleri $\frac{1}{x_1^2}$ ve $\frac{1}{x_2^2}$ olan ikinci dereceden denklemin kökler çarpımı,

$$\frac{1}{x_1^2} . \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{(x_1 . x_2)^2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

O halde Kökleri $\frac{1}{x_1^2}$ ve $\frac{1}{x_2^2}$ olan ikinci dereceden denklem,

$$x^2 - \left(-\frac{11}{36}\right)x + \frac{1}{36} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{11}{36}x + \frac{1}{36} = 0 \text{ dır}$$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

1. $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} = 1$ denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} = 1 \Rightarrow \frac{x-3-x-2}{(x+2).(x-3)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{x^2 - x - 6} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 6 = -5$$

$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ denkleminde

$a = 1,\ b = -1,\ c = -1$ olup denklemin kökler çarpımı,

$\frac{c}{a} = -\frac{1}{1} = -1$ dir.

2. $mnx^2 - (m+2n)x + 2 = 0$ denkleminin köklerini m ve n ye bağlı olarak bulunuz.

Çözüm:

$$mnx^2 - (m+2n)x + 2 = 0 \Rightarrow (mx-2).(nx-1) = 0$$

$$\Rightarrow mx - 2 = 0 \text{ veya } nx - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{m} \text{ veya } x = \frac{1}{n}$$

bulunur.

3. $2x^2 + (2m-6)x - 1 = 0$ denkleminin simetrik iki kökü olduğuna göre, m kaçtır?

Çözüm:

Denklemin simetrik iki kökü olduğuna göre kökler toplamı sıfırdır.

$2x^2 + (2m-6)x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

Bu denklemde $a = 2,\ b = 2m-6,\ c = -1$ olduğuna göre,

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{2m-6}{2} = 0$$

$\Rightarrow -2m + 6 = 0 \Rightarrow m = 3$ bulunur.

4. $x^2 + (u+2)x + 2k = 0$ denkleminin kökleri sıfırdan farklı olan u ve k sayılarıdır. Buna göre, büyük olan kök kaçtır?

Çözüm:

$x^2+(u+2)x+2k=0$ denkleminin

Kökler çarpımı,

$\frac{c}{a}=\frac{2k}{1}=2k \Rightarrow u.k=2k \Rightarrow u=2$ bulunur.

Kökler toplamı,

$-\frac{b}{a}=-\frac{u+2}{1}=-u-2 \Rightarrow u+k=-u-2$

$\Rightarrow 2+k=-2-2 \Rightarrow k=-6$

bulunur. O halde büyük olan kök, $u=2$ dir.

5. $u \neq k$ olmak üzere $\frac{1}{u}-\frac{1}{k}=\frac{1}{u-k+x}-\frac{1}{x}$ denkleminin köklerinin toplamını u ve k ya bağlı olarak bulunuz

Çözüm:

$\frac{1}{u}-\frac{1}{k}=\frac{1}{u-k+x}-\frac{1}{x}$ denklemini $ax^2+bx+c=0$ şekline getirmek için bazı düzenlemeler yapalım.

$$\underset{(k)}{\frac{1}{u}}-\underset{(u)}{\frac{1}{k}}=\underset{(x)}{\frac{1}{u-k+x}}-\underset{(u-k+x)}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{k-u}{uk}=\frac{x-u+k-x}{x.(x+u-k)} \Rightarrow \frac{k-u}{uk}=\frac{k-u}{x^2+x.(u-k)}$$

$$\Rightarrow x^2+(u-k)x=uk$$

$$\Rightarrow x^2+(u-k)x-uk=0 \text{ dır.}$$

Denklemin kökler toplamı,

$-\frac{b}{a}=-\frac{u-k}{1}=-u+k=k-u$ bulunur.

6. $x^2-(m+1)x-8=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1=(x_2)^2$ olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm:

Kökleri x_1 ve x_2 olan $x^2-(m+1)x-8=0$ denkleminde $a=1,\ b=-m-1,\ c=-8$ dir.

Buna göre,

$x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{-8}{1}=-8 \Rightarrow x_1.x_2=-8$ dir.

$x_1=(x_2)^2$ olduğuna göre,

$x_1.x_2=-8 \Rightarrow (x_2)^2.x_2=-8 \Rightarrow (x_2)^3=(-2)^3$

$\Rightarrow x_2=-2$ dir.

Bu değer denklemi sağlayacağından, denklemde yerine yazılırsa,

$(-2)^2-(m+1).(-2)-8=0 \Rightarrow 4+2m+2-8=0$

$\Rightarrow 2m-2=0 \Rightarrow m=1$ dir.

7. $x^2-6x+m-1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-\frac{10}{3}$ olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm:

Kökleri x_1 ve x_2 olan $x^2-6x+m-1=0$ denkleminde $a=1,\ b=-6,\ c=m-1$ dir. Buna göre,

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{1}=6$,

$x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{m-1}{1}=m-1$

$x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 6^2$

$\Rightarrow x_1^2 + 2.x_1.x_2 + x_2^2 = 36$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.x_1.x_2 = 36$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.(m-1) = 36$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 36 - 2.(m-1)$ dir.

$\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = -\dfrac{10}{3} \Rightarrow \dfrac{(x_1)^2 + (x_2)^2}{x_1.x_2} = -\dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{36 - 2.(m-1)}{m-1} = -\dfrac{10}{3} \Rightarrow m = -26$ dır.

8. $x^2 - 4x + 2k + 3 = 0$ denkleminin kökleri m ve n dir. $2m^2 + mn - n^2 = 20$ olduğuna göre k kaçtır?

Çözüm:

$x^2 - 4x + 2k + 3 = 0$ denkleminin kökleri m ve n ise,

$m + n = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-4}{1} = 4$ tür.

$2m^2 + mn - n^2 = 20 \Rightarrow (m+n).(2m-n) = 20$

$\Rightarrow 4.(2m-n) = 20 \Rightarrow 2m - n = 5$ tir.

$\left.\begin{array}{r} 2m - n = 5 \\ m + n = 4 \end{array}\right\} 3m = 9 \Rightarrow m = 3$ ve $n = 1$ bulunur.

$m = 3$ veya $n = 1$ değerlerinden biri denklemde yazılırsa, kök olduklarından denklemi sağlarlar.

$n = 1$ için, $1^2 - 4.1 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = 0$ bulunur.

9. $x^2 - 3x + 2a - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1^2 + x_2^2 = 3$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-3}{1} = 3$ tür.

Kökler çarpımı $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2a-1}{1} = 2a - 1$ dir.

$x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x_1^2 + 2.x_1.x_2 + x_2^2 = 9$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2.x_1.x_2 = 9$

$\Rightarrow 3 + 2.(2a-1) = 9 \Rightarrow 4a + 1 = 9 \Rightarrow a = 2$ dir.

10. $x^2 - 7x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $T = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ olduğuna göre T kaçtır?

Çözüm:

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-7}{1} = 7$ dir.

Kökler çarpımı $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{1} = 1$ dir.

$T = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \Rightarrow T^2 = \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2$

$T^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1.x_2} = 7 + 2.\sqrt{1} = 9$

$T^2 = 9 \Rightarrow T = 3$ veya $T = -3$ tür.

Ancak $\sqrt{x_1} \geq 0$ ve $\sqrt{x_2} \geq 0$ olduğundan

$T=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geq 0$ olup T negatif olamaz. O halde $T=3$ tür.

11. $x^2-4x+2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\dfrac{1}{x_1-3}+\dfrac{1}{x_2-3}$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

Kökler toplamı $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-4}{1}=4$ tür.

Kökler çarpımı $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{1}=2$ dir.

$$\frac{1}{x_1-3}+\frac{1}{x_2-3}=\frac{x_1-3+x_2-3}{(x_1-3).(x_2-3)}$$

$$=\frac{x_1+x_2-6}{x_1.x_2-3.(x_1+x_2)+9}=\frac{4-6}{2-3.4+9}=2 \text{ dir.}$$

12. $x^2-6x+a+2=0$ denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması, geometrik ortalamasına eşit olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$x^2-6x+a+2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

Kökler toplamı $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-6}{1}=6$ tür.

Kökler çarpımı $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{a+2}{1}=a+2$ dir

Köklerin aritmetik ortalaması, $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ tür.

Köklerin geometrik ortalaması, $\sqrt{x_1.x_2}=\sqrt{a+2}$ dir.

Köklerin aritmetik ortalaması, geometrik ortalamasına eşit olduğuna göre,

$$\sqrt{a+2}=3\Rightarrow\left(\sqrt{a+2}\right)^2=3^2\Rightarrow a+3=9\Rightarrow a=7 \text{ dir.}$$

13. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$ denkleminin kökü kaçtır?

Çözüm:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5\Rightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\right)^2=5^2$$

$$x+x+5+2.\sqrt{x^2+5x}=25\Rightarrow 2.\sqrt{x^2+5x}=20-2x$$

$$\Rightarrow\left(2.\sqrt{x^2+5x}\right)^2=(20-2x)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2+20x=400-80x+4x^2$$

$$\Rightarrow 100x=400\Rightarrow x=4 \text{ bulunur.}$$

14. $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=2\sqrt{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=2\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{2x-1}=8\Rightarrow\sqrt{2x-1}=8-x$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=(8-x)^2$$

$$\Rightarrow 2x-1=64-16x+x^2\Rightarrow x^2-18x+65=0$$

$$\Rightarrow(x-5).(x-13)=0\Rightarrow x-5=0 \text{ veya } x-13=0$$

$$\Rightarrow x=5 \text{ veya } x=13 \text{ bulunur.}$$

Fakat $x=13$ değeri yerine yazıldığında denklemi sağlamaz. O halde verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç=\{5\}$ tir.

15. $\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{x+2}=12$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{x+2}=12$ denkleminde $\sqrt[4]{x+2}=t$ olsun. O halde $\sqrt{x+2}=t^2$ olur. Verilen denklemden,

$t^2+t=12 \Rightarrow t^2+t-12=0 \Rightarrow (t+4).(t-3)=0$

$\Rightarrow t+4=0$ veya $t-3=0$

$\Rightarrow t=-4$ veya $t=3$ olur.

$\sqrt[4]{x+2}=t$ olduğundan t negatif olamaz.

O halde $t=3$ tür.

$t=3 \Rightarrow \sqrt[4]{x+2}=3 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{x+2}\right)^4=3^4$

$x+2=81 \Rightarrow t=79$ bulunur.

O halde verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç=\{79\}$ dur.

16. $\left(x^2+2x\right)^2-18.\left(x^2+2x\right)+45=0$ denkleminin köklerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\left(x^2+2x\right)^2-18.\left(x^2+2x\right)+45=0$ denkleminde

$x^2+2x=t$ dönüşümü yapılırsa,

$t^2-18t+45=0$ denklemi elde edilir.

$t^2-18t+45=0 \Rightarrow (t-15).(t-3)=0$

$\Rightarrow t-15=0$ veya $t-3=0 \Rightarrow t=15$ veya $t=3$ tür.

$t=15$ için $x^2+2x=15 \Rightarrow x^2+2x-15=0$ denkleminin kökleri toplamı, $-\frac{b}{a}=-\frac{2}{1}=-2$ dir.

$t=3$ için $x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0$ denkleminin kökleri toplamı, $-\frac{b}{a}=-\frac{2}{1}=-2$ dir.

O halde verilen denklemin kökleri toplamı,

$(-2)+(-2)=-4$ tür.

17. $x^2+|x+2|-4=0$ denkleminin reel köklerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$x^2+|x+2|-4=0$ denklemini, mutlak değerin içini pozitif yapan değerler için ayrı, negatif yapan değerler için ayrı çözmeli, bulunan çözümlerin birleşimini almalıyız.

1.Durum

$x+2\geq 0$ ise $x\geq -2$ olup $|x+2|=x+2$ olduğundan,

$x^2+|x+2|-4=0 \Rightarrow x^2+x+2-4=0$

$\Rightarrow x^2+x-2=0$

$\Rightarrow (x+2).(x-1)=0$

$\Rightarrow x=-2$ veya $x=1$

bulunur. Her iki kökte $x\geq -2$ koşuluna uyduğundan $x\geq -2$ iken denklemin kökleri -2 ve 1 dir. Bu değerler denklemde yazılırsa denklemi sağladığı görülür.

2.Durum

$x+2<0$ ise $x<-2$ olup $|x+2|=-x-2$ olduğundan,

$$x^2+|x+2|-4=0 \Rightarrow x^2-x-2-4=0$$

$$\Rightarrow x^2-x-6=0$$

$$\Rightarrow (x-3).(x+2)=0$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ veya } x=-2$$

bulunur. Ancak bulunan bu değerlerin ikisi de $x<-2$ koşuluna uymadığından kök değildirler. Buna göre $x<-2$ iken denklemin reel kökü yoktur.

O halde verilen denklemin çözüm kümesi, $Ç=\{-2,1\}$ olup kökler toplamı $-2+1=-1$ dir.

18. $x_1.x_2-x_1-x_2=7$ ve $x_1+x_2+2.x_1.x_2=5$ olduğuna göre, kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm:

Verilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\left.\begin{array}{l} x_1.x_2-x_1-x_2=7 \\ x_1+x_2+2.x_1.x_2=5 \end{array}\right\} 3.x_1.x_2=12 \Rightarrow x_1.x_2=4 \text{ olur.}$$

$$x_1+x_2+2.x_1.x_2=5 \Rightarrow x_1+x_2+2.4=5$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=-3 \text{ bulunur.}$$

O halde kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem,

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2=0 \text{ ise,}$$

$$x^2-(-3)x+4=0 \Rightarrow x^2+3x+4=0 \text{ bulunur.}$$

19. $x^2+(k-2)x-6=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökleri x_1+4 ve x_2+4 olan ikinci dereceden denklem $x^2-7x+6=0$ olduğuna göre, k kaçtır?

Çözüm:

Kökleri x_1 ve x_2 olan $x^2+(k-2)x-6=0$ denkleminin kökleri toplamı,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{k-2}{1}=-k+2 \text{ dir.}$$

Kökleri x_1+4 ve x_2+4 olan $x^2-7x+6=0$ denkleminin kökleri toplamı,

$$x_1+4+x_2+4=-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{1}=7 \text{ ise,}$$

$$x_1+x_2+8=7 \Rightarrow -k+2=-1 \Rightarrow k=3 \text{ bulunur.}$$

20. $2x^2-5x+u^2+z^2=0$ denkleminin kökleri u ve z dir. Bu denklemin diskriminantı Δ olduğuna göre, kökleri Δ ve 2 olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm:

Kökleri u ve z olan $2x^2-5x+u^2+z^2=0$ denkleminde $a=2,\ b=-5,\ c=u^2+z^2$ dir.

Kökler çarpımı $u.z=\frac{c}{a}=\frac{u^2+z^2}{2}$ dir.

$$u.z=\frac{u^2+z^2}{2} \Rightarrow 2.uz=u^2+z^2$$

$$\Rightarrow u^2+z^2-2uz=0 \Rightarrow (u-z)^2=0$$

$$\Rightarrow u-z=0 \Rightarrow u=z \text{ dir.}$$

$u=z$ olduğuna göre verilen denklemin kökleri eşittir. Kökleri eşit olan ikinci dereceden denklemlerin diskriminantları sıfırdır. Bu durumda $\Delta=0$ dır.

Kökleri $\Delta = 0$ ve 2 olan ikinci dereceden denklem,

$x^2 - (0+2)x + 0.2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$ dır.

21. $2x^2 + 8x + k + 1 = 0$ denkleminin iki reel kökü olduğuna göre k nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

$2x^2 + 8x + k + 1 = 0$ denkleminin iki reel kökü olduğuna göre denklemin diskriminantı sıfırdan büyük veya sıfıra eşittir.

$2x^2 + 8x + k + 1 = 0$ denkleminde,

$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow 8^2 - 4.2.(k+1) \geq 0$

$\Rightarrow 64 - 8k - 8 \geq 0 \Rightarrow k \leq 7$ olur.

Buna göre k nın alabileceği en büyük değer 7 dir.

22. $x^2 - 6x + 2m - 1 = 0$ denkleminin çakışık (eşit) iki reel kökü olduğuna göre, m kaçtır?

Çözüm:

$x^2 - 6x + 2m - 1 = 0$ denkleminin çakışık (eşit) iki reel kökü olduğuna göre $\Delta = 0$ dır.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4.1.(2m-1) = 0$

$\Rightarrow 36 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow m = 5$ tir.

23. $x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini a ya bağlı olarak bulunuz.

Çözüm:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2a)^2 - 4.1.(a^2 - 9)$

$\Delta = 4a^2 - 4a^2 + 36 = 36 > 0$ olduğundan denklemin iki farklı reel kökü vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2a) + \sqrt{36}}{2.1} = a + 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2a) - \sqrt{36}}{2.1} = a - 3$$

olup denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{a - 3, a + 3\}$ bulunur.

24. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

Önce verilmiş olan denklemi $ax^2 + bx + c = 0$ şekline getirelim,

$$\underset{(2)}{\frac{1}{x^2}} - \underset{(x)}{\frac{1}{2x}} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{2-x}{2x^2} = 3 \Rightarrow 6x^2 = 2 - x$$

$\Rightarrow 6x^2 + x - 2 = 0$ olur.

$6x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (3x+2).(2x-1) = 0$

$\Rightarrow 3x + 2 = 0$ veya $2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ veya $x = \frac{1}{2}$ olur.

O halde verilen denklemin çözüm kümesi, $Ç = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

25. $(0{,}25)^{x-1} = 2^{x^2 - 1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$$(0{,}25)^{x-1} = 2^{x^2-1} \Rightarrow \left(\frac{25}{100}\right)^{x-1} = 2^{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 2^{x^2-1} \Rightarrow \left(2^{-2}\right)^{x-1} = 2^{x^2-1}$$

$$\Rightarrow 2^{-2x+2} = 2^{x^2-1} \Rightarrow x^2 - 1 = -2x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3).(x-1) = 0$$

$\Rightarrow x + 3 = 0$ veya $x - 1 = 0 \Rightarrow x = -3$ veya $x = 1$

bulunur. Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{-3,1\}$ dir.

26. $9^x - 4.3^{x+1} + 27 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$$9^x - 4.3^{x+1} + 27 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 4.3.3^x + 27 = 0$$

$$\Rightarrow \left(3^x\right)^2 - 12.3^x + 27 = 0$$

denkleminde $3^x = t$ dönüşümü yapılırsa,

$$t^2 - 12.t + 27 = 0 \Rightarrow (t-9).(t-3) = 0$$

$\Rightarrow t = 9$ veya $t = 3$ bulunur.

$t = 9$ ise, $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$ dir.

$t = 3$ ise, $3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$ dir.

Buna göre

$9^x - 4.3^{x+1} + 27 = 0$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{1,2\}$ dir.

27. $x^2 - mx + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 + \frac{2}{x_2} = \frac{3}{2}$ olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm:

$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$ tür.

$$x_1 + \frac{2}{x_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x_1.x_2 + 2}{x_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4+2}{x_2} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow \frac{6}{x_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 4$ bulunur.

Bu değer denklemin kökü olduğundan denklemi sağlar.

$x^2 - mx + 4 = 0$ denkleminde $x = 4$ yazalım.

$4^2 - m.4 + 4 = 0 \Rightarrow 16 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 5$ tir.

28. $x^2 - (a-1)x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $(x_1)^2.x_2 + x_1.(x_2)^2 = 6$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

Kökler toplamı, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-(a-1)}{1} = a - 1$ dir.

Kökler çarpımı, $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$ tür.

$$(x_1)^2.x_2 + x_1.(x_2)^2 = 6 \Rightarrow x_1.x_2.(x_1 + x_2) = 6$$

$\Rightarrow 3.(a-1) = 6 \Rightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$ tür.

29. $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

Kökler toplamı, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$ dir.

Kökler çarpımı, $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{a+1}{1} = a+1$ dir.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3 \Rightarrow \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2}{x_1.x_2} = -3$$

$$\Rightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2.x_1.x_2}{x_1.x_2} = -3$$

$$\Rightarrow \frac{2^2 - 2.(a+1)}{a+1} = -3$$

$$\Rightarrow 4 - 2a - 2 = -3a - 3$$

$$\Rightarrow a = -5 \text{ tir.}$$

30. $x^2 + 2x - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre kökleri $x_1 + 3$ ve $x_2 + 3$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm:

Kökleri $x_1 + 3$ ve $x_2 + 3$ olan ikinci dereceden denklemi bulmak için $x^2 + 2x - 5 = 0$ denkleminde x yerine $x - 3$ yazılırsa,

$$(x-3)^2 + 2.(x-3) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 2x - 6 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \text{ bulunur.}$$

31. $m \neq 2$ olmak üzere $x^2 + (m+1)x - 2 = 0$ ve $x^2 + 3x - m = 0$ denklemlerinin birer kökleri ortak olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm:

$x^2 + (m+1)x - 2 = 0$ ve $x^2 + 3x - m = 0$ denklemlerinin birer kökleri ortak ise (eşitse) öyle bir x değeri vardır ki bu değer her iki denklemi de sağlar. Bu durumda iki denklemi birbirine eşitleyerek ortak kökü bulalım.

$$x^2 + (m+1)x - 2 = x^2 + 3x - m$$

$$\Rightarrow x.(m+1-3) = 2 - m \Rightarrow (m-2).x = -(m-2)$$

$\Rightarrow x = -1$ bulunur. $x^2 + 3x - m = 0$ denkleminde x yerine -1 yazalım.

$$(-1)^2 + 3.(-1) - m = 0 \Rightarrow 1 - 3 - m = 0 \Rightarrow m = -2 \text{ dir.}$$

32. $x^2 - 3ax + a = 0$ denkleminin kökleri sıfırdan farklı olan m ve n sayılarıdır. Buna göre, m nin n türünden değerini bulunuz.

Çözüm:

Kökler toplamı, $m + n = -\frac{b}{a} = -\frac{-3a}{1} = 3a$ dır.

Kökler çarpımı, $m.n = \frac{c}{a} = \frac{a}{1} = a$ dir.

$m + n = 3a$ ve $m.n = a$ ise $\frac{m+n}{m.n} = \frac{3a}{a} = 3$

$$\Rightarrow m + n = 3mn \Rightarrow 3mn - m = n \Rightarrow m.(3n-1) = n$$

$$\Rightarrow m = \frac{n}{3n-1} \text{ dir.}$$

33. $x_1 < x_2$ olmak üzere $x^2 - 13x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ kaçtır?

Çözüm:

Kökler toplamı, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-13}{1} = 13$ tür.

Kökler çarpımı, $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$ tür.

$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = t$ olsun. Eşitliğin her iki tarafının karesini alalım.

$\Rightarrow t^2 = \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 = x_1 - 2.\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2} + x_2$

$\Rightarrow t^2 = x_1 + x_2 - 2.\sqrt{x_1.x_2} = 13 - 2.\sqrt{4} = 9$

$\Rightarrow t = 3$ veya $t = -3$ tür. Ancak

$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < 0$ olduğundan,

$t = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < 0 \Rightarrow t = -3$ bulunur.

34. $x^2 - (x_1 - 4)x + x_2 + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre $x_1 + x_2$ kaçtır?

Çözüm:

Kökler toplamı, $x_1 + x_2 = -\frac{-(x_1 - 4)}{1} = x_1 - 4$ tür.

Kökler çarpımı, $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{x_2 + 4}{1} = x_2 + 4$ tür.

$x_1 + x_2 = x_1 - 4 \Rightarrow x_2 = -4$ bulunur.

$x_1.x_2 = x_2 + 4 \Rightarrow -4.x_1 = -4 + 4 \Rightarrow x_1 = 0$ bulunur.

Buna göre $x_1 + x_2 = 0 + (-4) = -4$ tür.

35. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

Bütün reel sayılar için $\sqrt{x+1} \geq 0$ ve $\sqrt{x-1} \geq 0$ dır.

Bunun için $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = -3$ denklemini sağlayan reel sayı bulunamaz. Yani verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \phi$ dir.

36. $2^{x^2 - x + 1} - 2^{x^2 - x} + 2^{x^2 - x + 2} = 20$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$2^{x^2 - x + 1} - 2^{x^2 - x} + 2^{x^2 - x + 2} = 20$

$\Rightarrow 2^{x^2 - x}.2^1 - 2^{x^2 - x} + 2^{x^2 - x}.2^2 = 20$

$\Rightarrow 2^{x^2 - x}.(2 - 1 + 4) = 20 \Rightarrow 2^{x^2 - x}.5 = 20$

$\Rightarrow 2^{x^2 - x} = 4 \Rightarrow 2^{x^2 - x} = 2^2 \Rightarrow x^2 - x = 2$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2).(x+1) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$ veya $x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2$ veya $x = -1$ dir.

Buna göre verilen denklemin çözüm kümesi,

$Ç = \{-1, 2\}$ dir.

37. $2x^2 - x - 5 = 0$ denkleminin köklerinin çarpmaya göre terslerini kök kabul eden ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm:

$2x^2 - x - 5 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ ve $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$ dir.

Buna göre kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden denklem soruluyor. Bulacağımız denklemin,

Kökler toplamı, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}$ ve

Kökler çarpımı, $\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}=\frac{1}{-\frac{5}{2}}=-\frac{2}{5}$ tir.

O halde köklerinin toplamı $-\frac{1}{5}$ ve köklerinin çarpımı $-\frac{2}{5}$ olan ikinci dereceden denklem,

$$x^2-\left(-\frac{1}{5}\right)x+\left(-\frac{2}{5}\right)=0 \Rightarrow x^2+\frac{x}{5}-\frac{2}{5}=0$$

$$\Rightarrow 5x^2+x-2=0 \text{ bulunur.}$$

38. $x^2-\sqrt{x^2-x-3}=x+9$ denkleminin reel köklerinin toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$x^2-\sqrt{x^2-x-3}=x+9$$

$\Rightarrow x^2-x-3-\sqrt{x^2-x-3}-6=0$ denkleminde

$\sqrt{x^2-x-3}=t$ dönüşümü yapılırsa, $x^2-x-3=t^2$ olup,

$$x^2-x-3-\sqrt{x^2-x-3}-6=0 \Rightarrow t^2-t-6=0$$

denklemi elde edilir.

$t^2-t-6=0 \Rightarrow (t-3).(t+2)=0 \Rightarrow t=3$ veya $t=-2$

$t=-2$ için $t=\sqrt{x^2-x-3}=-2$ olamaz.

$t=3$ için $t=\sqrt{x^2-x-3}=3$ olup,

$$t^2=x^2-x-3=9 \Rightarrow x^2-x-12=0$$

$$\Rightarrow (x-4).(x+3)=0$$

$\Rightarrow x=4$ veya $x=-3$ tür.

Bu köklerin ikisi de başta verilen denklemi sağlar.

Buna göre denklemin reel köklerinin toplamı,

$-3+4=1$ bulunur.

40. $x^2-3=|x+3|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$x^2-3=|x+3|$ denkleminde, mutlak değerli ifadenin içinde $x-3$ olduğu için $x-3$ ün işaretine göre çözüm yapacağız.

1.Durum

$x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$ olup $|x-3|=x-3$ olur.

$$x^2-3=|x-3| \Rightarrow x^2-3=x-3 \Rightarrow x^2-x=0$$

$\Rightarrow x.(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ veya $x=1$ dir.

Ancak bulunan bu iki değerin ikisi de $x\geq 3$ koşuluna uymadığından kök değildirler. O halde $x-3\geq 0$ iken denklemin çözüm kümesi, $Ç=\phi$ dir.

2.Durum

$x-3<0 \Rightarrow x<3$ olup $|x-3|=-x+3$ olur.

$$x^2-3=|x-3| \Rightarrow x^2-3=-x+3 \Rightarrow x^2+x-6=0$$

$$\Rightarrow (x+3).(x-2)=0$$

$\Rightarrow x=-3$ veya $x=2$ dir.

Bu köklerin ikisi de $x<3$ koşuluna uyar. O halde $x-3<0$ iken denklemin çözüm kümesi, $Ç=\{-3,2\}$ dir.

Böylece $x^2-3=\|x+3\|$ denkleminin çözüm kümesi $Ç=\{-3,2\}$ bulunmuş olur. **39.** $x^2-12x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x^2+mx+n=0$ denkleminin kökleri $\sqrt{x_1}$ ve $\sqrt{x_2}$ olduğuna göre n kaçtır? **Çözüm:** Kökleri x_1 ve x_2 olan $x^2-12x+4=0$ denkleminde $x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{4}{1}=4$ tür. Kökleri $\sqrt{x_1}$ ve $\sqrt{x_2}$ olan $x^2+mx+n=0$ denklemi $\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2}=\frac{c}{a}\Rightarrow\sqrt{x_1.x_2}=\frac{n}{1}\Rightarrow\sqrt{4}=n\Rightarrow n=2$ dir. **KONU BİTMİŞTİR.**	