BİNOM AÇILIMI

Tanım

n doğal sayı olmak üzere,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}.x^n + \binom{n}{1}.x^{n-1}y + ... + \binom{n}{n}.y^n$$

$$(x-y)^n = \binom{n}{0}.x^n - \binom{n}{1}.x^{n-1}y + ... + \binom{n}{n}.y^n$$

ifadelerine **binom açılımı** denir.

$\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$,..., $\binom{n}{n}$ sayılarına **binom katsayıları** denir.

$\binom{n}{0}.x^n$, $\binom{n}{1}.x^{n-1}y$, ... , $\binom{n}{n}.y^n$

ifadelerin her birine **terim** denir.

$\binom{n}{r}.x^{n-r}y^r$ ifadesinde $\binom{n}{r}$ **katsayı**, x^{n-r} ile y^r terimin çarpanlarıdır.

Örnek:

$$(x+2y)^3 = \binom{3}{0}.x^3 + \binom{3}{1}.x^3 2y + \binom{3}{2}.x^3(2y)^2 + \binom{3}{3}.y^3$$

$$= 1.x^3 + 3x^2.2y + 3.x.4y^2 + 1.y^3$$

$$= x^3 + 6x^2y + 12.xy^2 + y^3$$

Binom Açılımının Özellikleri

1. $(x+y)^n$ açılımında n + 1 tane terim vardır.

Örnek:

$(x+2y)^3$ açılımında 3 + 1 = 4 tane terim vardır.

2. $(x+y)^n$ açılımında her terimdeki x ve y çarpanlarının üslerinin toplamı n sayısına eşittir.

Örnek:

$(x+2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12.xy^2 + y^3$ açılımında dikkat edilirse her terimdeki üsler toplamı 3 tür.

3. $(x+y)^n$ ifadesinin katsayılarının toplamı x ile y yerine 1 yazılarak bulunur.

Örnek:

$(x+y)^2$ açılımında x ile y yerine 1 yazılırsa katsayılar toplamı,

$(x+y)^2 = (1+1)^2 = 4$ olur.

4. $(x+y)^n$ ifadesinde sabit terimi bulmak için x ile y yerine 0 yazılır.

Örnek:

$(x+3)^4$ ifadesinin açılımında katsayıların toplamı m, sabit terim n olduğuna göre m + n toplamını bulalım.

Çözüm:

Açılımda katsayılar toplamını bulmak için x yerine 1 yazılırsa katsayılar toplamı,

$m = (1+3)^4 = 4^4 = 256$ olur.

Açılımda tanımsızlığa neden olmuyorsa değişkenlerin yerine 0 yazılarak sabit terim bulunur.

Buna göre x yerine 0 yazılırsa sabit terim,

$n = (0+3)^4 = 3^4 = 81$ olur.

Buna göre

m + n = 337 bulunur.

5. $(x+y)^n$ ifadesinin açılımı x'in azalan kuvvetlerine göre dizildiğinde baştan r + 1 inci terim nda n + 1 tane terim $\binom{n}{r}.x^{n-r}y^r$ olur.

Örnek:

$\left(x-\frac{y}{3}\right)^6$ ifadesinin açılımında terimler x in azalan kuvvetlerine göre dizildiğinde baştan 2. terimi bulalım

Çözüm:

$\left(x-\frac{y}{3}\right)^6$ ifadesinin baştan r + 1 inci terimi,

$\binom{6}{r}.x^{6-r}\left(-\frac{y}{3}\right)^r$ olur.

r yerine r +1= 2 ise r = 1 yazılırsa,

$\binom{6}{1}.x^{6-1}\left(-\frac{y}{3}\right)^1 = -6.x^5.\frac{y}{3} = -2x^5y$ bulunur.

6. $(x+y)^{2n}$ açılımında ortanca terim $\binom{2n}{n}.x^ny^n$ dir.

Örnek:

$\left(x^2+\frac{2}{x^3}\right)^6$ açılımında ortanca terim,

$\binom{6}{3}.\left(x^2\right)^3\left(\frac{2}{x^3}\right)^3 = 20.x^6.\frac{8}{x^9} = 160.x^{-3}$ tür.

Örnek:

$(x-2y)^5$ ifadesinin açılımını yapalım.

Çözüm:

$(x-2y)^5$

$$= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-2y) + \binom{5}{2}x^3(-2y)^2$$
$$+ \binom{5}{3}x^2(-2y)^3 + \binom{5}{4}x^1(-2y)^4 + \binom{5}{5}(-2y)^5$$

$$= x^5 - 10.x^4.y + 40.x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

Örnek:

$\left(x-\frac{y}{3}\right)^6$ ifadesinin açılımında terimler x in azalan kuvvetlerine göre dizildiğinde sondan 2. terimi bulalım.

Çözüm:

$\left(x-\frac{y}{3}\right)^6$ açılımında 6 + 1 = 7 terim vardır.

Sondan 2. terim baştan 6. terimdir. r + 1 = 6 ise r = 5 olup bu terim;

$\binom{6}{5}.x^{6-5}.\left(-\frac{y}{3}\right)^5 = -6.x.\frac{y^5}{243} = -\frac{2}{81}xy^5$ bulunur.

Örnek:

$(2x-y)^8 = ... + ax^3y^5 + ...$ olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$(2x-y)^8$ açılımında baştan r + 1 inci terim,

$\binom{8}{r}.(2x)^{8-r}(-y)^r$ olup, bu terimin ax^3y^5 olabilmesi için 8 – r = 3 olması gerekir. Buradan r = 5 bulunur. Bulunan bu r değeri yazılırsa,

$$\binom{8}{5}.(2x)^{8-5}(-y)^5 = 56.8x^3(-y)^5 = -448x^3y^5$$ olup

a = – 448 olmalıdır.

Örnek:

$(x+y)^8$ ifadesi x in azalan kuvvetlerine göre sıralandığında ortanca terimi bulunuz.

1.Çözüm:

$(x+y)^{2n}$ açılımında ortanca terim $\binom{2n}{n}.x^n y^n$ idi. O halde

ortanca terim, $\binom{8}{4}.x^4y^4 = 70.x^4y^4$ bulunur.

2.Çözüm:

$(x+y)^8$ ifadesinde 8+1= 9 terim olup ortanca terim 5. terimdir. r + 1=5 ise r = 4 olup baştan 5. terim,

$$\binom{8}{4}.x^{8-4}y^4 = 70.x^4y^4$$ tür.

Örnek:

$\left(x^2+\dfrac{2}{x^3}\right)^6$ açılımında bir terim ax^2 dir. Buna göre a kaçtır?

Çözüm:

Baştan r + 1 inci terim, $\binom{6}{r}.(x^2)^{6-r}.\left(\dfrac{2}{x^3}\right)^r$ dir. Bu terimin

ax^2 olması için;

$$\binom{6}{r}.(x^2)^{6-r}.\left(\frac{2}{x^3}\right)^r = \binom{6}{r}.x^{12-2r}.\frac{2^r}{x^{3r}}$$

$$= \binom{6}{r}.2^r.x^{12-5r} = ax^2$$

olmalıdır. Buradan 12 – 5r = 2 olup r = 2 bulunur.

Buna göre,

$$a = \binom{6}{2}.2^2 = 15.4 = 60$$ olur.

Örnek:

$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^9$ ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

Çözüm:

x yerine 0 yazıldığında ifade tanımsız olacağından bu yöntem kullanılamaz.

Baştan r + 1 inci terim sabit ise,

$$\binom{9}{r}.(x^2)^{9-r}.\left(-\frac{2}{x}\right)^r = \binom{9}{r}.(-2)^r.x^{18-3r}$$ olup bu terimin

sabit terim olması için x in kuvveti 0 olmalıdır.

Çünkü sabit terim değişken içermez.

O halde 18 – 3r = 0 ise r = 6 bulunur.

Bu durumda sabit terim,

$$\binom{9}{r}.(-2)^r = \binom{9}{6}.(-2)^6 = 84.64 = 5376$$ olur.

Örnek:

$(x^2+3y)^n$ ifadesinin açılımında x^6y^3 lü terimin katsayısı kaçtır?

Çözüm:

x^6y^3 lü terim baştan r + 1 inci terim olsun.

Buna göre,

$\binom{n}{r}.(x^2)^{n-r}.(3y)^r = \binom{n}{r}.3^r.x^{2n-2r}y^r$ olup bu terim x^6y^3 lü terim olacaksa kuvvetler eşit olmalıdır.

O halde r = 3 tür. 2n – 2r = 6 ise 2n – 2.3 = 6 olup n = 6 bulunur.

O halde katsayı, $\binom{n}{r}.3^r = \binom{6}{3}.3^3 = 20.27 = 540$ olur.

Örnek:

$\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right)^5$ açılımında bir terim ax^{-4} tür. Buna göre a kaçtır?

Çözüm:

$$\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right)^5 = \left(\frac{(x+1)^2}{x^2}\right)^5 = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{10}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$$

olup bu ifadede baştan r + 1 inci terim ax^{-4} ise,

$\binom{10}{r}.1^{9-r}.\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r}.x^{-r} = ax^{-4}$ olup buradan r = 4 bulunur.

O halde $a = \binom{10}{4} = 210$

Örnek:

$1-\binom{n}{1}.10+\binom{n}{2}.10^2+\ldots+(-1)^n.\binom{n}{n}.10^n = -3^{18}$ olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm:

Verilen açılım $(1-10)^n$ ifadesinin açılımıdır.

O halde, $(1-10)^n = -3^{18}$ olup, buradan;

$(1-10)^n = (-9)^n = -\left(3^2\right)^9 = -9^9 = (-9)^9$ elde edilir.

$(-9)^n = (-9)^9 \Rightarrow n = 9$ dur.

Örnek:

$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?

Çözüm:

x yerine 0 yazıldığında ifade tanımsız olacağından bu yöntem kullanılamaz.

Baştan r + 1 inci terim sabit ise,

$$\binom{10}{r}.\left(\sqrt{x}\right)^{10-r}.\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r = \binom{10}{r}.(-2)^r.x^{5-\frac{r}{2}-\frac{r}{2}}$$

$$= \binom{10}{r}.(-2)^r.x^{5-r}$$

olup sabit terim x'ten bağımsız olacağından x'in kuvveti 0 olmalıdır. Şu halde 5 – r = 0 ise r = 5 bulunur.

O halde sabit terim,

$\binom{10}{r}.(-2)^r = \binom{10}{5}.(-2)^5 = -8064$ bulunur.

Örnek:

$(x+2y+3z)^9$ açılımındaki terimlerin kat sayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm:

$(x+2y+3z)^9$ açılımındaki terimlerin kat sayılarının toplamı,

$(x+2y+3z)^9 = (1+2.1+3.1)^9 = 6^9$ dur.

Örnek:

$(x-3)^8.(2x+y)^7$ ifadesinin açılımındaki bir terim $1960mx^8y^4$ ise m'yi bulalım.

Çözüm:

$(x-3)^8$ ifadesinin açılımında baştan r + 1 inci terim,

$\binom{8}{r}.x^{8-r}.(-3)^r$ dir.

$(2x+y)^7$ ifadesinin açılımında baştan k + 1 inci terim,

$\binom{7}{k}.(2x)^{7-k}.y^k$ dır.

$(x-3)^8.(2x+y)^7$ ifadesinin açılımındaki bir terim $1960mx^8y^4$ ise,

$$\binom{8}{r}.x^{8-r}.(-3)^r.\binom{7}{k}.2^{7-k}.x^{7-k}.y^k = 1960mx^8y^4$$

$$\binom{8}{r}.(-3)^r.\binom{7}{k}.2^{7-k}.x^{8-r}x^{7-k}.y^k = 1960mx^8y^4$$

$$\binom{8}{r}.(-3)^r.\binom{7}{k}.2^{7-k}.x^{15-r-k}.y^k = 1960mx^8y^4 \text{ ise;}$$

k = 4 ve 15–r–k= 8 ise 15–r–4= 8 olup r = 3 bulunur.

Şu halde;

$$1960m = \binom{8}{3}.(-3)^3.\binom{7}{4}.2^{7-4} = 56.(-27).35.8$$

$$\Rightarrow m = \frac{56.(-27).35.8}{1960} = -216$$

bulunmuş olur.

Konu Bitmiştir…